平成31年度（令和元年度）指定スーパーサイエンスハイスクール

SS数学T課題研究

愛知県立旭丘高等学校
数学科

もくじ

はじめに

愛知県立旭丘高等学校は、令和元年度（平成31年度）から、スーパーサイエンスハイスクール（SSH校）の指定を受けています。研究開発課題は「イノベーションを創出し、トップリーダーとして日本の将来を拓き、世界を牽引する科学技術人材の育成」とし、第1学年では数学・理科でSS科目を設定し、課題研究基礎の授業を設け、研究開発課題の達成に向かって取り組んでいます。SS科目では「科学的探究を深く行う最高レベルの学問的能力・叡智（ソフィアとする）の獲得を目指した教育課程を研究開発する」を目的としています。

本冊子は、数学のSS科目である「SS数学T」の課題研究の生徒作品を掲載致しました。掲載作品は、7月末にグループ決定、課題設定し、夏休みの期間を中心に調査・探究したものを、9月～10月上旬の期間の授業で、発表し合い評価し合った作品のうち、生徒や教員の評価の高かったものです。

作品の中には、手書きのものもあり、ページ数も様々で、形式が整っておらず、また内容も十分とはいえませんが、SSH初年度の取組として、各クラス2作品ずつを冊子のなかにまとめました。

ご覧いただき、ご感想やご助言をいただけると幸いです。

愛知県立旭丘高等学校

第1学年SS数学T授業担当一同

正多角形の作図

～正多角形とその面積～

加藤　海宇

抄録

フェルマー数を使い作図できる正ｎ角形の正多角形のｎの値を調べ、その正多角形の作図をし、その面積を求めた。作図する範囲は、$3 \leqq n \leqq 12$ にし、作図ソフトを使い面積を√を使って表した。

1. 研究の背景と目的

フェルマー数を利用して作図できる正ｎ角形の作図し，さらにｎが大きくなると面積にどのように反映されていくのかも調べることとする。

2. 内容

作図できる多角形を調べるにはフェルマー数を利用しなければいけないと聞いたので
まずフェルマー数について調べた。

✧ フェルマー数とは

フェルマー数とは $2^{2^m}+1$（m は自然数）で表せる自然数のことで、
m 番目のフェルマー数は F_m と表されることがある。
また、素数であるフェルマー数はフェルマー素数と呼ばれる。
名の由来であるピエール・ド・フェルマーは、
1607 年にフランスで生まれ５７歳で亡くなった。
実際に $0 \leqq m \leqq 5$ の範囲内で表すと・・・

$F_0=2^1+1=3$

$F_1=2^2+1=5$

$F_2=2^4+1=17$

$F_3=2^8+1=257$

$F_4=2^{16}+1=65537$

$F_5=2^{32}+1=4294967297$ ← 素数ではない

このようになる。
今日までにフェルマー素数は m=0,1,2,3,4 の５個以外は見つかってない。

✧ 作図可能な正多角形は何個あるのか？

ガウスの出版した『整数論の研究』において、正ｎ角形が作図可能であるかの条件が、ｎの２の冪か相違なるフェルマー素数（$2^{2^m}+1$ と表せる）か、またはこれらの積であるときに可能であると記載されている。

このことを式で表すと・・・

$n=2^{\alpha}F_aF_b\cdots F_c$（$F_a, F_b, \cdots F_c$ はすべて異なるフェルマー素数、α は負ではない整数）となる。

例えば、$\alpha=0$、$F_a=F_0$ とすると、$n=3$ になる。

$\alpha=1$、$F_a=F_0$ とすると、$n=6$ になる。

$\alpha=2$、$F_a=F_0$ とすると、$n=24$ になる。

$\alpha=0$、$F_a=F_2$とすると、n＝１７になる。

$\alpha=1$、$F_a=F_0$、$F_b=F_1$とすると、n＝３０になる。

$\alpha=0$、$F_a=F_0$、$F_b=F_1$、$F_c=F_2$とすると、n＝２５５になる。

計算して、n（３００以下とする）は、小さい順に並べると、
n=2,3,4,5,6,8,10,12,15,16,17,20,24,30,32,34,40,48,51,60,64,68,
80,85,96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257, 272
となる。

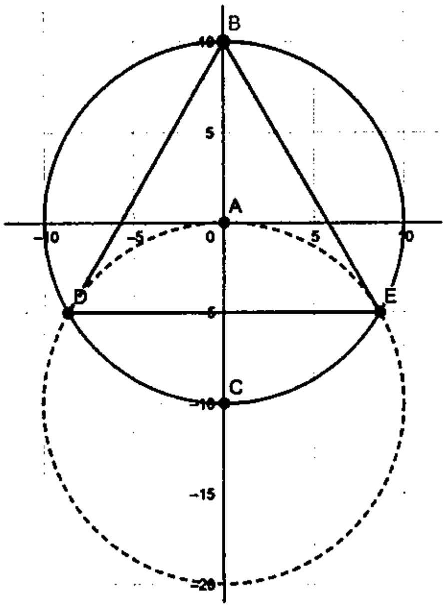
上のｎならばすべて作図可能だが正ｎ角形を作図するとき、n＝２の時はできない。
今回ここでは分かりやすさの観点から 3≦n≦12 の範囲で作図をしようと思う。

✧ 作図の方法

今回は、半径１０の円の中に正確に書くためにグラフ作成ツール[GeoGebraClassic6（IGI）]を使用する。

✧ 正ｎ角形の作図

✧ 正三角形（n＝３）



作図方法

① A(0,0)，B(0,10)を取り、A を中心とした半径 10 の円を描く。

② C(0,-10)を取り、C を中心とした半径 10 の円を描く。

③ 円 A と円 C の交点を D,E とする。

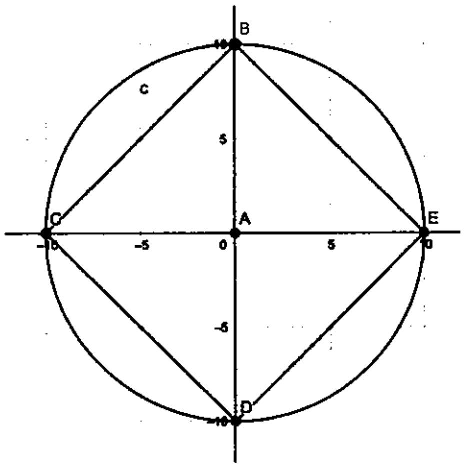
④ 点 B,D,E を結ぶ。

面積

DE と Y 軸との交点を F とすると、
A と E を結ぶと $1:2:\sqrt{3}$の直角三角形ができる。AE=10 より EF=$5\sqrt{3}$，
DE=$10\sqrt{3}$，BF=15

よって、$10\sqrt{3}\times15\times\frac{1}{2}=75\sqrt{3}$

✧ 正四角形・正方形（n＝４）



作図方法

① A(0,0)，B(0,10)を取り、A を中心とした半径 10 の円を描く。

② 円 A と X 軸,Y 軸との交点を B,C,D,E とする。

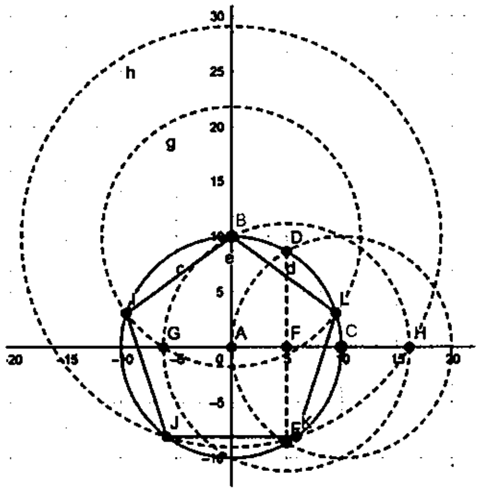
③ 点 B,C,D,E を結ぶ。

面積

BD=20，CE=20 より

$20\times20\times\frac{1}{2}=200$

✧ 正五角形（n＝5）



作図方法

① A(0,0)，B(0,10)を取り、Aを中心とした半径10の円を描く。

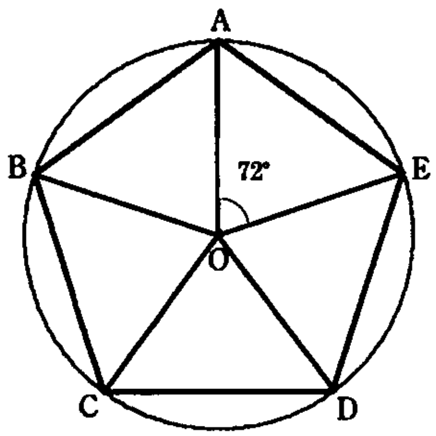
② C(10,0)を中心とする半径10の円を描く。

③ 円Aと円Cの交点をD,Eとし、DEとX軸の交点をFとしてFを中心としBを通る円を描く。

④ 円FとX軸の交点G,HとしてBを中心としGを通る円を描き、円Aとの交点をI,Lとする。

⑤ Bを中心としHを通る円を描き、円Aとの交点をJ,Kとする。

⑥ 点B,I,J,K,Lを結ぶ。



面積

△AOEで a＝AO＝10,

$\theta=\angle AOE=72°$ より、

二等辺三角形の公式…$\frac{1}{2}\cdot a^2\sin\theta$ に

代入して、$\triangle AOE=\frac{1}{2}\cdot 10^2\cdot\sin 72°$

$\cos 72° =\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ と $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より、

$$\sin 72° =\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$ より、

$$\triangle AOE=\frac{1}{2}\cdot 10^2\sin 72°$$

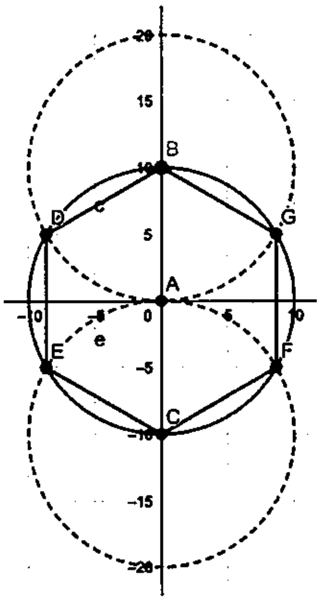
$$=50\times\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$=\frac{25\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$$

合同な三角形が5つあるから

$$\frac{25\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}\times 5=\frac{125\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$$

✧ 正六角形（n＝6）



作図方法

① A(0,0)，B(0,10)，C(0,-10)を取り、点Aを中心とした半径10の円を描く。

② 点Bを中心とし点Aを通る円と円Aとの交点をD,Gとする。

③ 点Cを中心とし点Aを通る円と円Aとの交点をE,Fとする。

④ 点B,D,E,C,F,Gを結ぶ。

面積

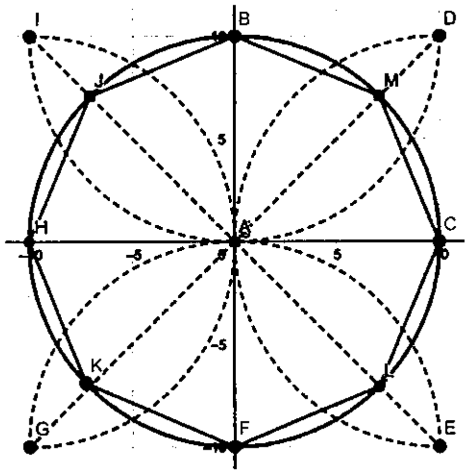
点Aと点B,D,E,C,F,Gをそれぞれ結ぶと1辺が10の正三角形が6つできるので、

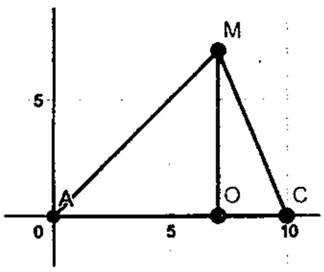
1辺が10の正三角形の面積は

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 10^2 = 25\sqrt{3}$

よって、$6\times 25\sqrt{3} = 150\sqrt{3}$

✧ 正八角形（n＝8）





作図方法

① A(0,0)，B(0,10)を取り、点Aを中心とした半径10の円を描く。

② C(10,0)，F(0,-10)，H(-10,0)をとる。

③ 点B,C,F,Hを通る、半径10の円をかき、それぞれの交点をD,E,G,Iとする。

④ DとG、EとIを結び、円Aとの交点をJ,K,L,Mとする。

⑤ 点B,J,H,K,F,L,C,Mを結ぶ。

面積

△ACMでMからACに垂線を下ろし交点を0とする。

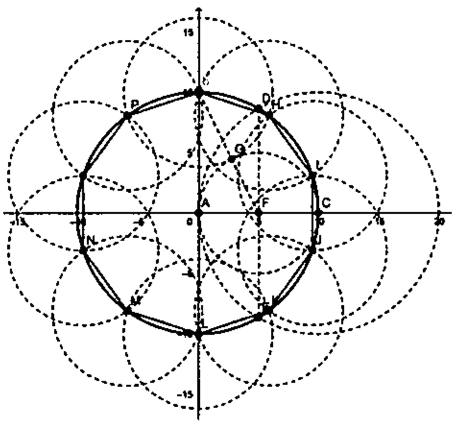
AM＝10より、MO＝$5\sqrt{2}$

よって、$10\times 5\sqrt{2}\times\frac{1}{2} = 25\sqrt{2}$

合同な三角形が8つあるから

$25\sqrt{2}\times 8 = 200\sqrt{2}$

✧ 正十角形（n＝１０）



作図方法

① A(0,0)，B(0,10)，C(10,0)を取り、点Aを中心とした半径10の円を描く。

② 円Aとの交点をD,Eとし、結びX軸との交点をFとする。

③ BとFを結びFを中心としてAを通る円をかきBFとの交点をGとする。

④ BGを半径とする円を描き、円Aとの交点をHとする。

⑤ HBを半径とする円を描き、円Aとの交点をLとし、以下同じことをする。

⑥ 隣り合う点を結ぶ。

面積

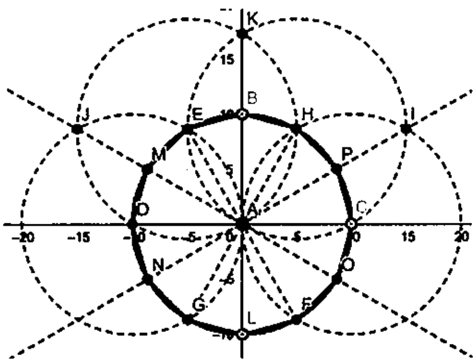
$\mathrm{Sin}36^\circ=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ より、

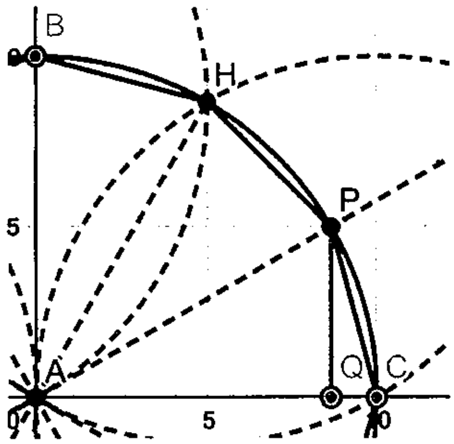
$8\times\frac{1}{2}\times10^2\times\mathrm{Sin}36^\circ$

$=400\times\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

$=100\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

✧ 正十二角形（n＝１２）





作図方法

① A(0,10)，B(0,10)を取り、Aを中心とする半径10の円をかく。

② C(10,0)，D(-10,0)を取り、半径10の円をかく。

③ 円Cと円Aの交点をF,H、円Dと円Aの交点をE,Gとし、H,GとE,Fを結び、60° の角を作る。

④ EとHからそれぞれ半径10の円を描き、円Eと円Dの交点をJ、円Hと円Cとの交点をI、円Eと円Hの交点をKとする。

⑤ JとA、IとA、KとAを通る直線を描き、円Aとの交点をそれぞれ順に、M,O・P,N・B,Lとする。

⑥ 点B,E,M,D,N,G,L,F,O,C,P,Hを結ぶ。

面積

△APC で P から AC に垂線を下ろし交点を Q とする。

∠PAC＝30°、AP＝10 より、PQ＝5

よって、$10\times5\times\frac{1}{2}=25$

合同な三角形が１２個あるから

$25\times12=300$

✧ 半径 10 の円の面積

$10\times10\times3.14=314$

3. 結果・考察

円に内接する正多角形の作図の手順は n の値が大きくなるにつれて、多くなる傾向がある。

下の表からわかるように面積も n の値が大きくなるにつれて大きくなって円の面積に近づいていく。

図形の種類	正三角形	正方形	正五角形	正六角形	正八角形	正十角形	正十二角形	半径10の円
面積	$75\sqrt{3}$	200	$\frac{125\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$	$150\sqrt{3}$	$200\sqrt{2}$	$100\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	300	314

今回の課題研究を通して、正多角形はフェルマー素数と n の２の冪を使って表せる数だとその数を持つ正多角形の作図が可能であり、正多角形は無限にあるかもしれないということがわかった。

4. 結論

n が大きくなるほど作図手順が多くなる傾向がある。

また、面積は大きくなり円の面積に近づいていた。

正 65537 角形のようなたくさんの角を持つ正多角形を作図することが可能である。

5. 参考文献

・作図可能な正多角形

https://ja.m.wikipedia.org/wiki/%E5%AE%9A%E8%A6%8F%E3%81%A8%E3%82%B3%E3%83%B3%E3%83%91%E3%82%B9%E3%81%AB%E3%82%88%E3%82%8B%E4%BD%9C%E5%9B%B3

・フェルマー数

https://ja.m.wikipedia.org/wiki/%E3%83%95%E3%82%A7%E3%83%AB%E3%83%9E%E3%83%BC%E6%95%B0

虹をえがく数学

～Rainbow Mathematics～

1年1組40番　柳瀬　真愛

抄録

私は空に浮かぶ美しい虹と、不思議な数字の世界を整理する美しい数学とのコラボレーションを感じたいと思い、このテーマにした。虹の見え方には数学が深く関わっていることがよくわかった。数学は私たちの生活を支える基盤ともいえるだろう。

1．研究の背景と目的

この研究の背景・目的としては、夏休みを利用して家族でカナダ旅行に行った際、巨大なアーチ状の虹を見ることができ、虹と、その完成を支える数学との関係性に興味をもったことである。

2．方法（内容）

研究ｉ　主虹の赤色の部分において、太陽－水滴－観察者のなす角度が42°の時、赤い光が最も強く見える原理

研究ⅱ　副虹のときの光の反射と屈折の関係

研究ⅲ　主虹、副虹にさらに続く虹が見えない理由（反射虹は除く）

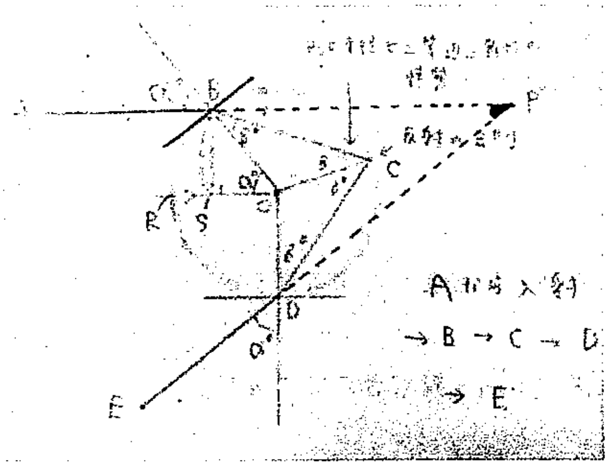
虹には濃く見える主虹と、その外側に薄く見える副虹がある。

主虹〉〉太陽光線が水滴の中で１回屈折する

副虹〉〉太陽光線が水滴の中で２回屈折する

※今回の研究では、常にα＝入射角、β＝屈折角とする。

研究ｉ　主虹の赤色の部分において、太陽－水滴－観察者のなす角度が42°の時、赤い光が最も強く見える原理



太陽光線が水滴に当たってかえってくる角度をa°とする。つまり、∠a＝∠APE。∠PBC と∠PDC はそれぞれ 180－β－（180－α）°。三角形の内角と外角の関係より、a＝2β－2{180－β－（180－α）}

＝4β－2α

空気の絶対屈折率は約 1.00、水の絶対屈折率は約 1.33

媒質Ａでの光速：VA＝C/NA　（Aは真空における光速、Nは絶対屈折率を表す）

屈折の法則(スネルの法則)より、入射角の正弦と屈折角の正弦の比が、それぞれの媒質での波の速さの比になるので、sinα/sinβ＝V空気/V水。この式にそれぞれの絶対屈折率から求めた光速を代入すると、1.33 になる。そして、これが、水に対する空気の屈折率になるから、屈折率＝1.33。

よって、sinβ＝sinα/1.33。

そして、0 から線分 AP に平行な線分 OR を引き、~~未~~B から線分 OR に垂線を引き、その交点を S とすると、同位角は等しいので、入射角α＝∠BOS

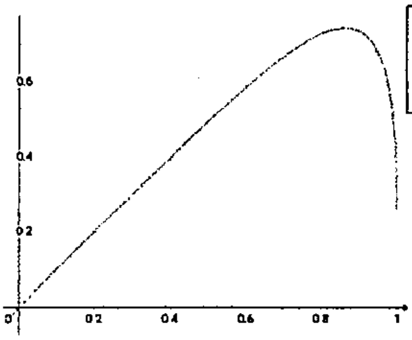
水滴の半径を 1 とすると、sinα＝x。(よって、sinβ＝x/1.33)

α＝arcsin(x)。

したがって、a＝4arcsin~~{(1.33) x}~~(x/1.33)－2{arcsin(x)}

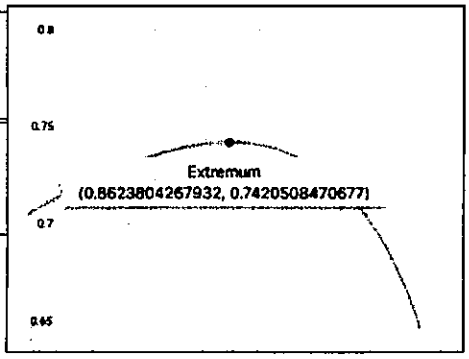
このaの値が最大となるときに、太陽光線が最も多く集まり、赤色の光が強くなる。

反射率×(透過率)²＝光の量が最大



←a＝4arcsin~~{1.33 x}~~(x/1.33)
－2{arcsin(x)}

最大値付近の拡大図と、最大値の座標→



このaが最大になるとき、x≒0.86238。sinα≒0.86238 となるから、α≒60°。よって、sinβ＝0.86238/1.33≒0.6484

β≒40.5°（sin40°＝0.6429、sin41°＝0.6561 のため）

さて、このとき、a＝4β－2α

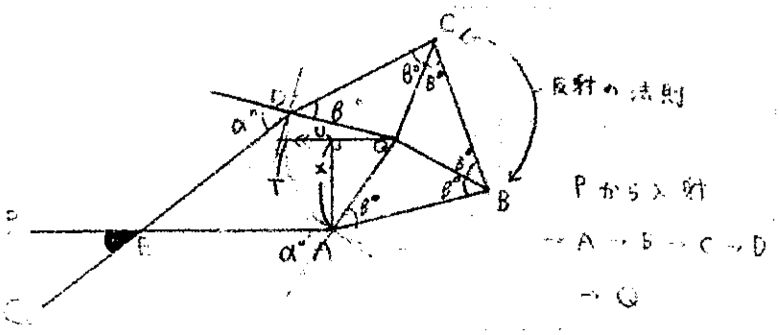
＝162－120

＝42

よって主虹の赤色の部分において、太陽‐水滴‐観察者のなす角度が約42°の時、赤い光が最も強く見える。

（なお、紫の光は屈折率の違いのために太陽‐水滴‐観察者のなす角度が40°の時、紫の光が最も強く見える。）

研究 ii　副虹のときの光の反射と屈折の関係



太陽光線が水滴に当たってかえってくる角度をb°とする。つまり、∠b＝∠PEQ。対頂角は等しいから、∠b＝∠AED。

ここで、∠EAB と∠EDC はそれぞれ $180-\alpha+\beta°$

また、$180°=\pi$

よって $\angle AED=540-2(180-\alpha+\beta)-4\beta$

$$=\pi+2\alpha-6\beta$$

$$=\angle b$$

そして、O から線分 AP に平行な線分 OT を引き、A から線分 OT に垂線を引き、その交点を U とすると、同位角は等しいので、入射角 $\alpha=\angle BOU$

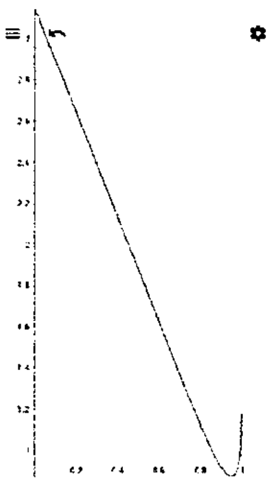
水滴の半径を 1 とすると、$\sin\alpha=x$。(よって、$\sin\beta=x/1.33$)

$\alpha=\arcsin(x)$。

研究 i より、$\sin\beta=(3/4)\sin\alpha$

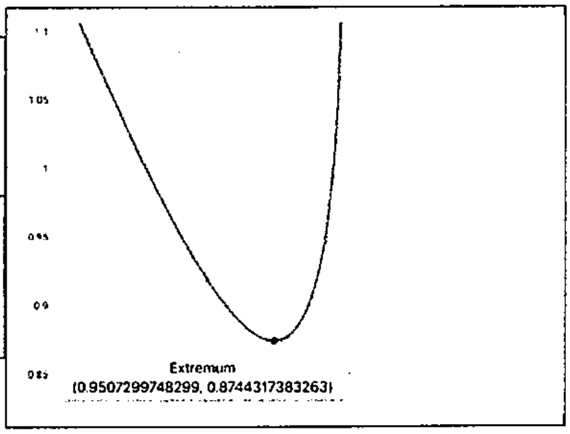
したがって、$b=\pi+2\arcsin(x)-6\{\arcsin(x)/1.33\}$

このbの値が最小となるときに、太陽光線が最も多く集まり、赤色の光が強くなる。



←$b=\pi+2\arcsin(x)-6\{\arcsin(x)/1.33\}$

最小値付近の拡大図と、最小値の座標→



このbが最小になるとき、$x\fallingdotseq0.95$。$\sin\alpha\fallingdotseq0.95$ となるから、$\alpha\fallingdotseq72$。

よって、$\sin\beta=0.95/1.33\fallingdotseq0.71$

$\beta \fallingdotseq 45.5^\circ$（$\sin 45^\circ = 0.7071$、$\sin 46^\circ = 0.7193$ のため）

さて、このとき、$b = 180 + 2\alpha - 6\beta$

$= 180 + 144 - 273$

$= 51$

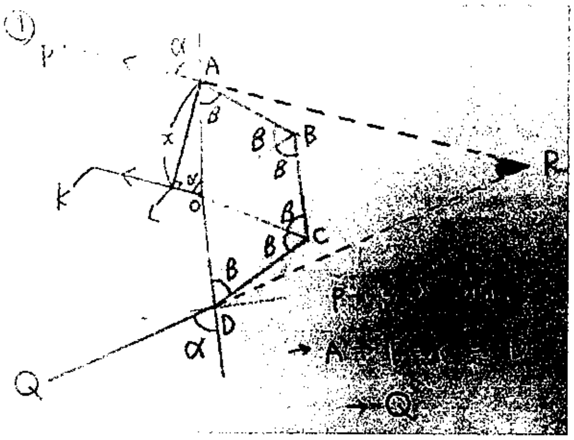
よって副虹の赤色の部分において、太陽‐水滴‐観察者のなす角度が 51°の時、赤い光が最も強く見える。

（なお、紫の光は屈折率の違いのために太陽‐水滴‐観察者のなす角度が 53°の時、紫の光が最も強く見える。副虹の場合、光が交差することから、紫が外側、赤が内側となることに注意する。）

研究ⅲ　主虹、副虹にさらに続く虹が見えない理由（反射虹は除く）

主虹、副虹にさらに続く虹ができるとすればその出来方は太陽光線が水滴の中で反射する回数によって、2 種類に分けられると考えられる。

①水滴の中で 2 回反射する



太陽光線が水滴に当たってかえってくる角度を c°とする。つまり、∠c ＝∠ARD。三角形の内角と外角の関係により、

$\angle c = 2\{360 - (450 + \alpha - 3\beta)\}$　←台形ＯＬＡＲから、∠ＯＲＡを求め、それを 2 倍する。

$= -2\alpha + 6\beta - 180$　3

そして、O から線分 AP に平行な線分 OK を引き、A から線分 OK に垂線を引き、その交点を L とすると、同位角は等しいので、入射角 $\alpha = \angle AOL$

水滴の半径を 1 とすると、$\sin\alpha = x$。（よって、$\sin\beta = x/1.33$）

$\alpha = \arcsin(x)$。

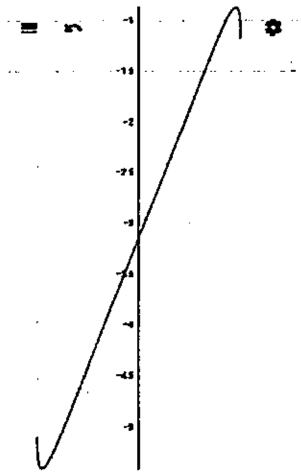
研究ⅰより、$\sin\beta = \sin\alpha / 1.33$

また、$180^\circ = \pi$

したがって、$c = -2\arcsin(x) + 6\arcsin(x/1.33) - \pi$

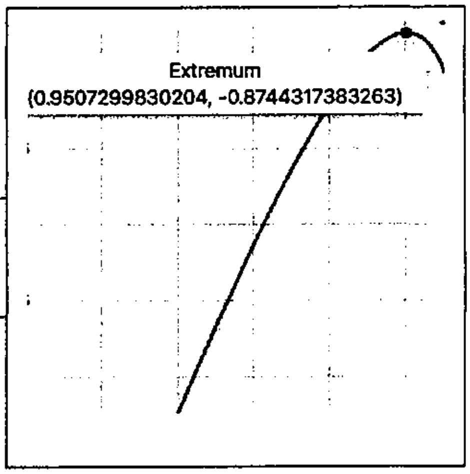
この c の値が最大となるときに、太陽光線が最も多く集まり、赤色の光が

強くなる。



← c ＝ − 2arcsin（x）＋ 6arcsin（x/1.33）− π

最大値付近の拡大図と、最大値の座標→



このcが最大になるとき、x＝0.95。

$\sin\alpha \fallingdotseq 0.95$ となるから、$\alpha \fallingdotseq 72°$。よって、$\sin\beta = 0.95/1.33 \fallingdotseq 0.714$

$\beta \fallingdotseq 45.5°$ （$\sin 45° = 0.7071$、$\sin 46° = 0.7193$ のため）

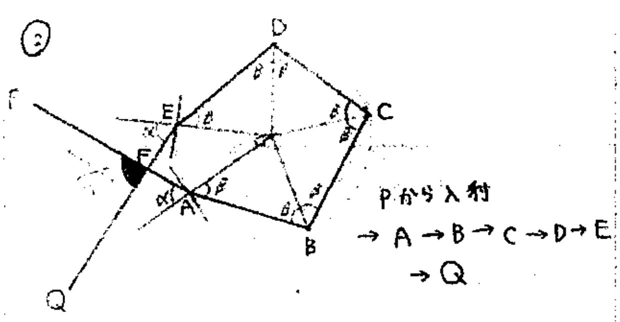
さて、このとき、$c = -2\alpha + 6\beta - 180$

$= -144 + 273 - 180$

$= -51$

角度が負の数になることはありえないので、この虹は見えない。

②水滴の中で3回反射する



太陽光線が水滴に当たってかえってくる角度をd°とする。つまり、∠d ＝∠APE。∠FABと∠FEDはそれぞれ180－α＋β°。三角形の内角と外角の関係より、

$d = 720 - 2(180 - \alpha + \beta) - 6\beta$

$= 360 + 2\alpha - 8\beta$

そして、Oから線分APに平行な線分OMを引き、Aから線分OMに垂線を引き、その交点をNとすると、同位角は等しいので、入射角$\alpha = \angle AON$

水滴の半径を1とすると、$\sin\alpha = x$。(よって、$\sin\beta = x/1.33$)

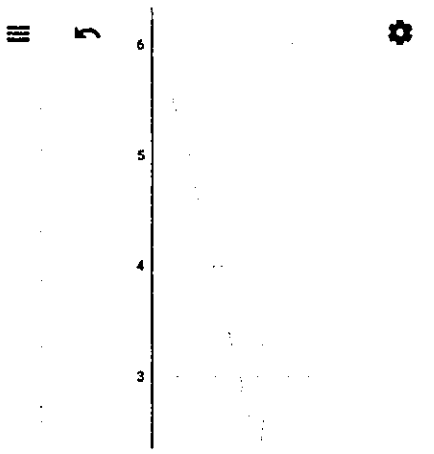
$\alpha = \arcsin(x)$。

研究iより、$\sin\beta = 1.33\sin\alpha$

また、$360^\circ = 2\pi$

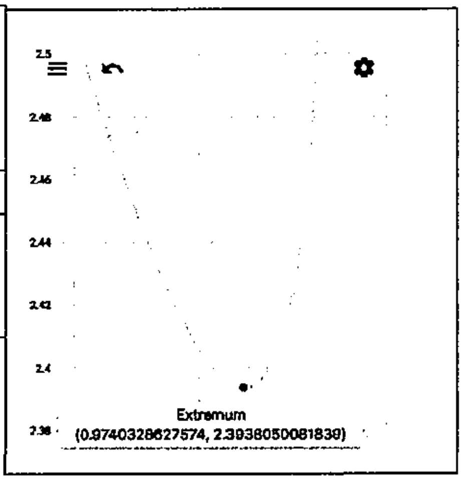
したがって、$d = 2\pi + 2\arcsin(x) - 8\arcsin(x/1.33)$

このdの値が最小となるときに、太陽光線が最も多く集まり、赤色の光が強くなる。



←$d = 2\pi + 2\arcsin(x) - 8\arcsin(x/1.33)$

最大値付近の拡大図と、最大値の座標→

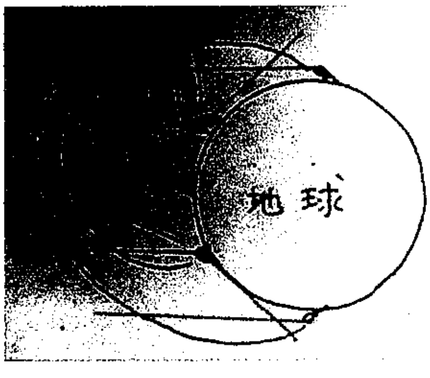


このdが最小になるとき、$x \fallingdotseq 0.974$。

$\sin\alpha \fallingdotseq 0.974$となるから、$\alpha \fallingdotseq 77^\circ$。よって、$\sin\beta = 0.974/1.33$
$\fallingdotseq 0.73233$

$\beta \fallingdotseq 47^\circ$ ($\sin 47^\circ = 0.7314$のため)

さて、このとき、$d = 360 + 2\alpha - 8\beta$
$= 360 + 154 - 376$
$= 138$



←図

オレンジ線:太陽光

まず、この虹の光は水滴の中で3回反射しているため、反射せずに水滴の外へ出ていく光が多く、とても光がうすいので、ほとんど見えない。さらに、太陽-水滴-観察者の角度が138°になると、図より、太陽の見える

方向と虹の見える方向とが同じになってしまう。だから、光が弱い虹の光は、光が強い太陽光に負けて、見えにくくなることもある。

今回の研究ⅲでは、水滴の中で光がそれぞれ、2度、3度反射するものについて調べたが、②の屈折では、この先、水滴の中で光が反射する回数が増えていくにつれて、水滴の外に出ていく光が増えるため、虹の光がどんどん弱くなり、反射した光がとても見えにくくなる。よって、主虹と副虹に続く虹は見えない（とても見えにくい）。

結果・考察

虹には 2 種類の反射の仕方があり、そのことが、虹の見える位置を決めているのだということが分かり、興味深かった。また、その2種類以外には虹が見えないのかということにまで深く考えて研究できたのはよかった。虹は、理科の光の原理を利用しているだけで、一見数学とは何の関係もないように思えるけれど、実際は虹が見えるまでのプロセスに数学が大きく関わっていることが分かり、数学は私たちの生活を支える基盤だとあらためて実感した。

参考文献

https://ja.wikipedia.org/wiki/虹
www.fnorio.com/0036rainbow1/rainbow1.htm

タイトル	1年 2組 12・17番
美しすぎるノート作り ～貴金属比で美しく～	名前 中村 直・冨士 皓世

抄録

「美しいノートを作りたい!」そんな純粋な理由で僕たちの研究は始まった。「黄金比」これは誰もが聞いたことのある言葉だろう。今回はこの黄金比が含まれる貴金属比を駆使して美しいノートを目指す。

I 研究動機

「きれいなノートを作りたい!」それは学生なら一度は感じた感情だろう。私達もそのうちの1人である 高校になってからは授業の進度が速く、板書も速いため、ノートが汚くなることが多い。そこで、数学、とくに比を利用してノートをきれいにまとめることができないだろうか、と考えたのである。

II 貴金属比とは

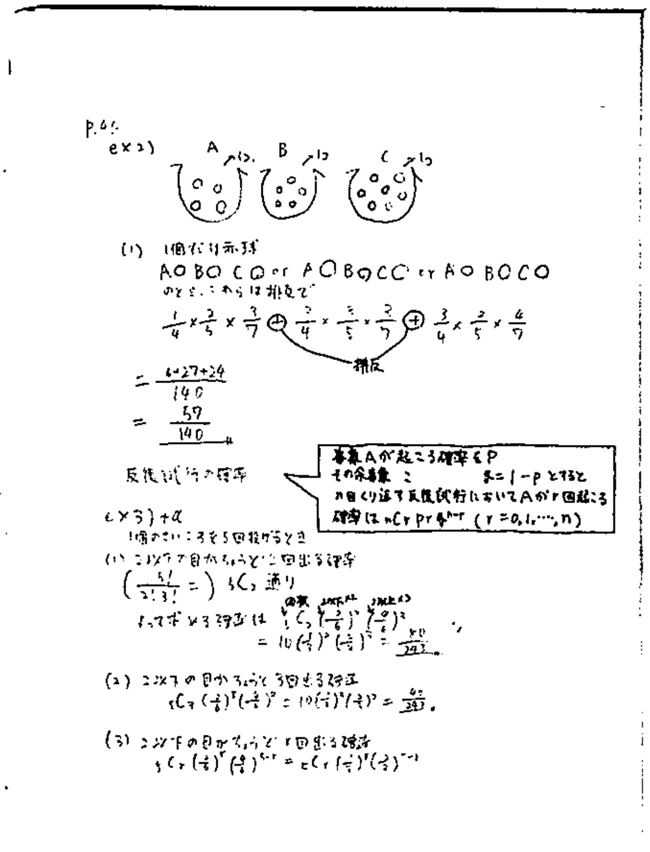
貴金属比とは $1:\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$ で表される比のことである。その代表例であり一般にもっとも知られている黄金比は最も美しい比とされている。黄金比を発見したのは古代ギリシャの数学者「エウドクソス」と言われており、その後、パルテノン神殿建設時に初めて黄金比が用いられたといわれている。黄金比を用いた歴史的建造物や美術品としてミロのビーナス(古代ギリシャ)、ピラミッド(古代エジプト)、レオナルド・ダ・ヴィンチのモナリザ(1503年～1519年頃)、パリの凱旋門(1836年)、バルセロナのサグラダ・ファミリア大聖堂(1882年～)などが挙げられる。他の貴金属比には、白銀比、青銅比、白金比などがあり、身の回りのさまざまなものに用いられている。

Ⅲ 研究方法

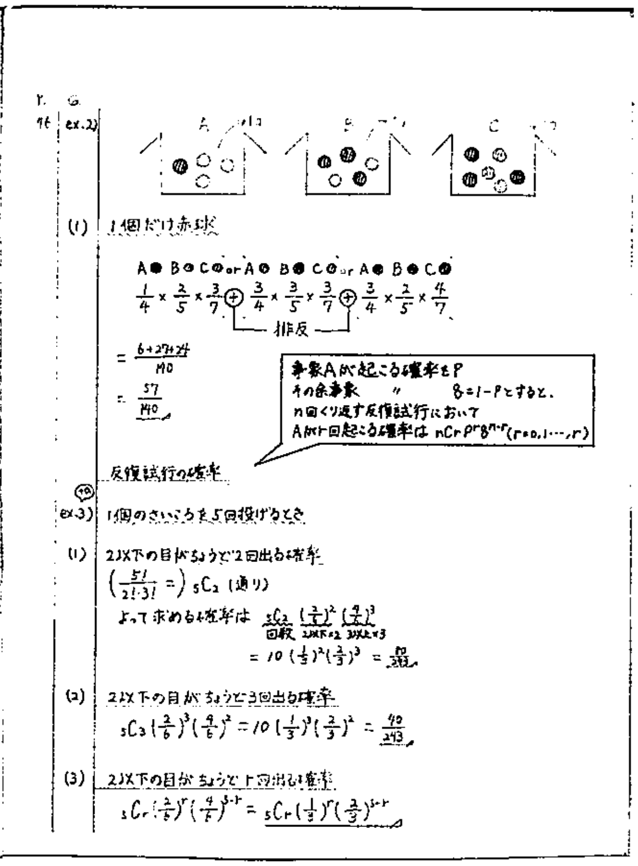
「美しい」と聞いて、まず思い浮かぶのが黄金属比の1つである「黄金比」だろう。調べてみると、ノートの縦と横、これもだいたい黄金比であることが判明した。使うことで物を美しく見せる黄金属比を駆使すれば、きっととても美しいものができあがるに違いない。そういった期待を込めて、ある日の板書にかかれている図式や文章のかたまりなどを全て黄金比にして完璧なノートを作り上げる!!

Ⅳ 比較

もともとのノート



黄金属比をつかってきれいに整えたノート

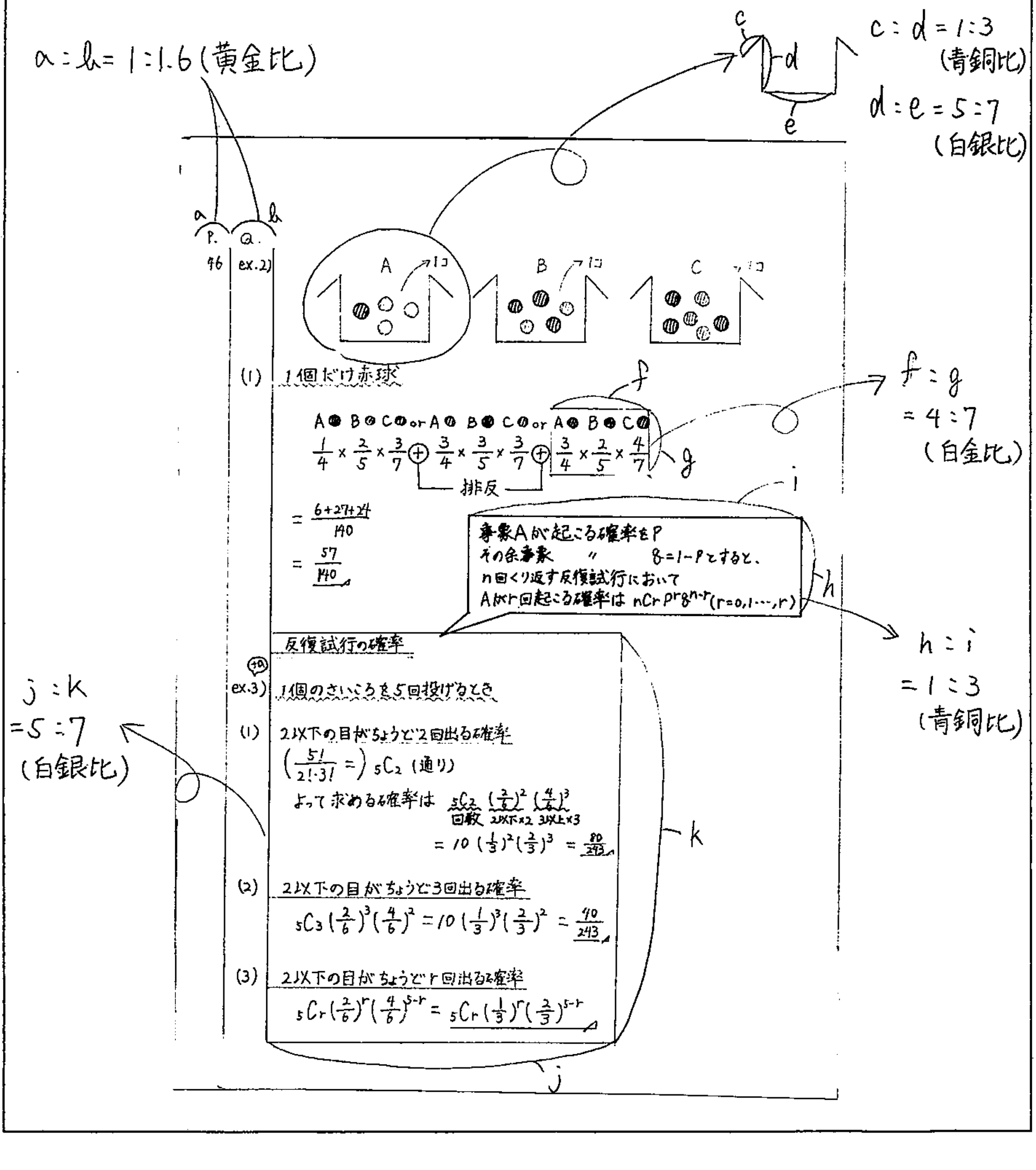


整える前に比べて見た目がすっきりし、何が書いてあるのかがわかりやすくなった。

タイトル	1 年　2 組　12, 17 番
	名前　中村直, 冨士皓世

V. 作成上のポイント

貴金属比を用いたノートを作成するに当たって以下の事に注意した。
※比の値はすべて近似値



Ⅵ、結果、考察、 9

「 今回ノートを作成するにあたってそもそもの配置を変え」
なかったせいもあってか、あまり変化が見られなかった。ただ、
パッと見た時に見栄えがいいノートにはなったと思う。以上のこと
3 からノートをとる時は貴金属比を頭の隅に置きながら、自分なり
に配置などを工夫してとることが重要であることがわかった。
これからノートをとる時はただ写すだけではなく、自分の色
を出しながら見やすく、きれいなノートを作っていこうと思う。」

Ⅶ、おまけ 身の周りの貴金属比 7

「 今回はノートに着目して捉えた貴金属比だが、世の中では」
非常に多くの場所で貴金属比が使われている。ここでは、
その一例を紹介していこう。

- 黄金比の例
  4 ・名刺やクレジットカードなどの縦横の長さ
  ・Apple社やTwitterのロゴ
- 白銀比の例
  ・ドラえもんやアンパンマン、キティちゃんの顔
  ・スカイツリー
- 青銅比はあまり使われていないようだ。 」

Ⅷ、参考文献 9

「 」
- 株式会社アーティス
  :デザインを美しくする「黄金比」について理解しよう!(身の回りにある黄金比)
3
- tree
  :黄金比をはじめとする貴金属比で、より美しいデザインを。
- NAVER まとめ
  :黄金比・白銀比・青銅比…デザインの参考になる数学的比率

※実はこのレポートにも貴金属比が使われている。

セ・リーグ(あわよくばドラゴンズ)の最強時代をつくるために

102 蒔田 歩夢

1.はじめに

普段試合をしているリーグを超えて対戦する交流戦やオールスターゲームは、普段と違った雰囲気がある。しかし例年セ・リーグはパ・リーグによく負け越している(資料1)。そのことについてルールや選手の面から理由を探っていくことにした。

2.研究の方法

セ・パ両リーグにおいて攻撃では、打率・本塁打・打点・盗塁・出塁率の各上位20位までの打撃成績を、投手では、防御率・セーブ・ホールド・勝利・奪三振の各上位20位までの投手成績をまとめて比較する。(成績は8月19日のデータ)

※規定回数を超えている選手が対象

3.仮説

両リーグで戦力の差はほぼなく、DH制の有無が勝敗に大きく関わっていると考える。

4.結果

(1)打率

大差はないが、セ・リーグが若干良い成績を残している

(2)本塁打

パ・リーグが1位の山川穂高選手を中心に良い成績を残している

(3)打点

本塁打が多いパ・リーグの方が打点でも良い成績を残している

(4)盗塁

パ・リーグが1位の金子侑司選手を中心に良い成績を残している

(5)出塁率

セ・リーグ1位の鈴木誠也選手が両リーグ通じてダントツだが、全体的に見るとパ・リーグの方が良い数字を残している

(6)防御率

規定投球回以上を投げた投手はセ・リーグの方が2人多いが、防御率の良い投手上位2人は、パ・リーグの投手だった

(7)勝利

両リーグで差はほとんどないと判断した

(8)奪三振

三振でアウトを取ろうとも、フライやゴロでアウトを取ろうとも同じアウトなので、今回はあまり重要視しない

(8)セーブ

複数セーブをあげた選手の人数は、パ・リーグの方が少なく、安定したクローザーがセ・リーグよりやや多いと考える。
※1 セーブの選手を除いた理由としては、例えば9回に守護神が登板して追いつかれ延長戦へと突入し、12回までに勝ち越した裏の回を抑えてセーブがついたという可能性があることを考え、その選手は常日頃のクローザーではないと判断したから
ex.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	計	H
Aチーム		1	0	0	0	3	0	0	0	0	2	6	15
Bチーム		0	2	0	0	0	0	0	0	2	0	4	9

(9)ホールド
パ・リーグが1位の宮西尚生選手を中心に、安定してホールドを重ねている選手がやや多いと感じられる

5.考察

今シーズン、パ・リーグで本塁打のランキング上位20位の選手のうちDHで10試合以上先発した選手が6人いる(図の青印)また、2019年6月30日の日本経済新聞によれば、今年の交流戦では外野まで飛んだ打球のうちフェンスを越えた割合がパ・リーグは10.1%(10本に1本)、セ・リーグは8.4%(12本に1本)であったという。また、パ・リーグの本拠地で行われた試合では、DHを起用できるのだが、今年の交流戦でセ・リーグのDHの5本塁打に対し、パ・リーグのDHは11本もの本塁打を放ったそうだ。これらのことからも、DH制の有無によってセ・パ各リーグの間に格差が生まれていると考えられる。

6.結論

DH制の有無により、セ・パ各リーグ間に格差が生じていると考えるので、セ・リーグもDH制の導入を考えるべきである。

7.今後の展望

今回はセ・リーグとパ・リーグの戦力を見て交流戦やオールスターゲームの成績を検証したが、次は球場の差や球団の資金力の差などより多方面からも分析したい。
本当はポジションや、チームごとに各選手の重回帰分析とかベクトルとかやりたかったんです…

8.参考文献

・今年最も強かったパ・リーグ 格差生んだ「比較優位」(写真=共同):日本経済新聞
https://www.nikkei.com/article/DGXMZO46695320Y9A620C1000000/

・埼玉西武ライオンズのスタメン一覧(ポジション)-プロ野球データ Freak
https://baseball-data.com/lineup/l.html
・東北楽天ゴールデンイーグルスのスタメン一覧(ポジション)-プロ野球データ Freak
https://baseball-data.com/lineup/e.html
・北海道日本ハムファイターズのスタメン一覧(ポジション)-プロ野球データ Freak
https://baseball-data.com/lineup/f.html
・福岡ソフトバンクホークスのスタメン一覧(ポジション)-プロ野球データ Freak
https://baseball-data.com/lineup/h.html
・千葉ロッテマリーンズのスタメン一覧(ポジション)-プロ野球データ Freak
https://baseball-data.com/lineup/m.html
・オリックス・バファローズのスタメン一覧(ポジション)-プロ野球データ Freak
https://baseball-data.com/lineup/bs.html
・2019 年度公式戦記録/NPB.jp 日本野球機構
http://npb.jp/bis/2019/stats/
・2020 年度セ・パ交流戦/NPB.jp 日本野球機構
http://npb.jp/interleague/2020/
・マイナビオールスターゲーム 2019/NPB.jp 日本野球機構
http://npb.jp/allstar/2019/

10.共同研究者

108 三木 淳 108 中山翔太

11.補足

補足① 〈パ・リーグに DH 制が誕生した理由〉

投手に代わり、打撃専門の野手を打順に組み入れる DH 制は、1975 年からパ・リーグで採用されている。得点 up により観客を増やす目的で、ちなみに DH 導入前年の観客動員数はセ・リーグの約 760 万人に対し、パ・リーグは約 350 万人だったらしい。アメリカ大リーグで、ア・リーグが 73 年から採用し、観客動員数増に成功したことが導入の背景にあった。

【教えて！ベースボール】なぜパ・リーグに DH 制があって、セ・リーグにはないの？-野球-SANSUPO.COM
https://www.sanspo.com/baseball/news/20131130/npb13113005000000-n1.html

補足② 〈用語解説〉

セ・リーグ、パ・リーグは日本のプロ野球の 2 つのリーグ。普段はリーグ内で試合を行うが、毎年、別のリーグの全チームと各 3 試合ずつ行う交流戦がある。

$$\text{打率}=\frac{\text{安打数}}{\text{打数}}=\frac{\text{安打数}}{\text{打席}-\text{犠打}-\text{犠飛}-\text{四死球}}$$

$$出塁率 = \frac{安打数 + 四球 + 死球}{打数 + 四球 + 死球 + 犠飛}$$

$$長打率 = \frac{塁打数(\ldots 単打 = 1, 二塁打 = 1, 三塁打 = 1, 本塁打 = 1)}{打数}$$

$$防御率 = \frac{自責点 \times 9}{投球回数}$$

→9 イニング(1 試合あたり)の自責点
※自責点…失策や捕逸などが絡まない、投手が責任を負わなければならない失点
防御率は小数点以下 3 位まで、それ以外の率は小数点以下 4 位まで求めて四捨五入
記録の計算方法 | 野球の記録について | NPB.jp 日本野球機構
http://npb.jp/scoring/calculation.html

$$奪三振率 = \frac{奪三振 \times 9}{投球回数}$$

→9 イニングあたりの奪三振数
奪三振率の計算方法をわかりやすく紹介 | 奪三振率の日本記録とは
https://smartbaseball.jp/topic/337
セーブ(簡単に)
勝利チームの最終投手で勝利投手ではなく、1/3 回以上を投げて、同点・逆転されずに試合を終わらせる。
❶登板時 3 点以内のリードなら 1 イニング以上投げる
❷登板時迎える打者 2 人にホームランを打たれたら、同点又は逆転せれる状況である イニング数は関係なし
❸3 イニング以上投げている投手はリードを保っていれば点差は関係なし
ホールド
先発、勝利、敗戦投手でなく、セーブも記録されていない選手で、交代完了投手でなく、アウトを 2 つ以上とり、降板した後自身に記録された失点によって自チームが同点・逆転されないこと。この状態で以下のいずれかを満たした時に記録。
・❶❷❸の時
・同点のまま失点を許さず降板
・登板中に自チームが勝ち越した時、リードを保って降板
複数でもよく、チームの最終的な勝敗には関係しない
※交代完了投手…自チームの最終守備イニングの 3 アウト目をとった投手

ホールドポイント
ホールド+救援勝利
セーブとホールドがつく条件の違い【野球用語】｜野球を人生の友とせよ
https://baseball-lab.xyz/save-hold/

まあこんなの知らなくても野球はできます…

12.Postscript

ここまでは共同研究者の2人と研究してきましたが、ここからは個人的な趣味の範囲で続きを行なって行こうと思います!!

ということで……

〈Extra Round〉

I.Introduction

この世の中にはたくさんのゲームがあります。特にスマホゲームなどは遊んでいる人も多いのではないでしょうか。そのゲームの中で一番鍵となってくるもの…それはガチャですよね。

今回はそのガチャについて"プロ野球スピリッツA"を題材に上の研究で調べ上げた最強チームを作るのに必要な選手を引き当てるのにはどれくらい引けばいいのか調べてみました。

II.Procedure

最近のガチャにはキャラが出る確率が表示されるようになった。

なので、その確率をあてにするとどれくらいの頻度でレアキャラが出現するのか計算してみる。

III.Experiment

プロ野球スピリッツAのプレミアムスカウトではS、A、Bの3種類のランクの選手が1人出現するガチャを25エナジー(モンストでいうオーブ)で1回引くことができる。各ランク、選手における出現確率は以下の通りである。(単発)

Sランク:2.5%(249種) 各0.01%

Aランク:8.5%(249種) 各0.0341%

Bランク:89.0%!?(270種) 各0.3246%

ここでSランクの選手が出る確率(期待値)は、$\frac{25}{1000}=\frac{1}{40}$であり、まぁ40回に1回出る計算になります。では、実際に40回ガチャを回してレアキャラが1回でも手に入る事象Aの確率を計算してみよう！

すると…

$$P(A) = 1 - P\left(40\text{回ガチャを回してレアキャラが1度もでない}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{39}{40}\right)^{40} = 1 - 0.36323243988788066 0898\ldots$$

$$= 0.636767560112119339\ldots$$

となる。つまりおよそ確率0.63でレアキャラは手に入る!! ちょっと低くないか？

さらに…

いくらSランクだからといっても目当ての選手が目当ての選手が出ないことには嬉しくないですよね？(強引)

同じく求めてみよう!!

※単発で引くと確率が$\frac{1}{10000}$になってしまうので、今回はより目当ての選手が出やすい10連ガチャで計算します。確率は以下の通りです。

1〜9人目

単発と同じ

10人目(イベントキャラなど強いキャラのみ排出)

Sランク:2.5%(20種) 各0.125%

Aランク:8.5%(20種) 各0.425%

Bランク:89.0% (21種) 各4.23%

$$\mathrm{P(B)} = 1 - \left(\frac{79}{80}\right)^{80} = 1 - 0.36556814404711699\ldots$$

$$= 0.63443185595288300 33\ldots$$

まぁ単発をあてにしなければ800回回すと少なくとも一体は0.634ぐらいの確率ででるかんじですかね…

ここまでで言いたかったことは当たり前ですが、確率をそのまま鵜呑みにしたらダメってことです。今回の例でいけば、確率$\frac{1}{40}$だからと言って40回ガチャを回したらレアキャラがが1回は必ずでるわけじゃないって意味なんですね笑

Ⅳ.Conclusion

ガチャで最強チームを作るには相当の労力と運が必要だ!!

Ⅴ.大数の法則

ちなみに、どうすれば確率$\frac{1}{40}$の確率に近づくんでしょうか？

それは簡単です！試行回数を増やせばいいんです！これも当たり前じゃないでしょうか？

じゃあ何回ぐらい試行したらいいのでしょう？これも計算してみよう！

〈ベルヌーイの定理(大数の法則)〉

大きな数 n に対して

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{Sn}}{\mathrm{n}}-\frac{1}{40}\right|>\frac{1}{100}\right)<0.01$$

*$\frac{1}{100}$、0.01 は任意の数

ここで$0 \leq k \leq n$に対して P(Sn = k)を計算してみると、

$$\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}\left(\frac{1}{\underset{40}{\cancel{6}}}\right)^{k}\left(\frac{\overset{39}{\cancel{5}}}{\underset{40}{\cancel{6}}}\right)^{n-k}$$

となる。但し

$$\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}=\mathrm{nCk}=\frac{n!}{\mathrm{k}\,!\,(\mathrm{n}-\mathrm{k})}$$

とする。

すると、

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{Sn}}{\mathrm{n}}-\frac{1}{40}\right|>\frac{1}{100}\right)=\mathrm{P}\left(Sn<\frac{3}{200}n\right)+P\left(Sn>\frac{7}{200}n\right)$$

$$\leq \mathrm{P}(\mathrm{Sn}=0)+\mathrm{P}\left(\mathrm{Sn}=1\right)+\cdots+\mathrm{P}\left(\mathrm{Sn}=\left[\frac{3}{200}\mathrm{n}\right]\right)$$

$$+\mathrm{P}(\mathrm{Sn}=[\tfrac{7}{200}\mathrm{n}])+\cdots+\mathrm{P}(\mathrm{Sn}=\mathrm{n}-1)+\mathrm{P}(\mathrm{Sn}=\mathrm{n})$$

$$=\binom{\mathrm{n}}{0}\left(\frac{39}{40}\right)^{\mathrm{n}}+\binom{\mathrm{n}}{1}\left(\frac{1}{40}\right)\left(\frac{39}{40}\right)^{n-1}+\cdots+\binom{\mathrm{n}}{\left[\frac{3\mathrm{n}}{200}\right]}\left(\frac{1}{40}\right)^{\left[\frac{3n}{200}\right]}\left(\frac{39}{40}\right)^{n-\left[\frac{3n}{200}\right]}$$

$$+\binom{\mathrm{n}}{\left[\frac{7\mathrm{n}}{200}\right]}\left(\frac{1}{40}\right)^{\left[\frac{7n}{200}\right]}\left(\frac{39}{40}\right)^{n-\left[\frac{7n}{200}\right]}+\cdots+\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n}-1}\left(\frac{1}{40}\right)^{n-1}\left(\frac{39}{40}\right)+\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n}}\left(\frac{1}{40}\right)^{n}$$

となります。

でもこれが 0.01 より小さくなるよう n を実際に計算して見つけるのは非常に困難です。

そこで、分散という概念を用います。

f(X)の分散を

$$V(f(X)) = E[f(X) - E[f(X)]^2]$$
$$= (f(\omega 1) - E[f(X)])^2 P(X = \omega 1) + \cdots + (f(\omega m) - E[f(X)]^2 P(X = \omega m)$$
$$= E[f(X)^2] - E[f(X)]^2$$

と定義する。

これを用いると、

$$V\left(\frac{Sn}{n}\right) = \left(\frac{0}{n} - \frac{1}{40}\right)^2 P(Sn = 0) + \cdots + \left(\frac{n-1}{\mathrm{n}} - \frac{1}{40}\right)^2 P(\mathrm{Sn} = \mathrm{n} - 1) + \left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}} - \frac{1}{40}\right)^2 P(S = n)$$

$$\geq \left(\frac{0}{n} - \frac{1}{6}\right)^2 P(\mathrm{Sn} = 0) + \cdots + \left(\frac{1}{\mathrm{n}}\left[\frac{3}{200}n\right] - \frac{1}{40}\right)^2 P\left(\mathrm{Sn} = \left[\frac{3}{200}n\right]\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{n}\left[\frac{7}{200}n\right] - \frac{1}{40}\right)^2 P(Sn = \left[\frac{7}{200}n\right] + \cdots + \left(\frac{n}{n} - \frac{1}{40}\right)^2 P(Sn = n)$$
$$\geq \left(\frac{1}{100}\right)^2 \left(P(\mathrm{Sn} = 0) + \cdots + \mathrm{P}\left(\mathrm{Sn} = \left[\frac{3}{200}n\right]\right) + P\left(Sn = \left[\frac{7}{200}n\right]\right) + \cdots + P(Sn = n)\right)$$
$$\geq \left(\frac{1}{100}\right)^2 P\left(\left|\frac{Sn}{n} - \frac{1}{40}\right| > \frac{1}{100}\right)$$

となり、これにより

$$P\left(\left|\frac{Sn}{n} - \frac{1}{40}\right| > \frac{1}{100}\right) \leq 10000V\left(\frac{Sn}{n}\right)$$

となりました。ここで、

$$V\left(\frac{Sn}{n}\right) = \frac{V(X1)}{n}$$

ということが知られている。

但し、X1 は確率 1/40 で 1、39/40 で 0 になるものとしておきます。これを用いると、$\mathrm{V(X1)} = \frac{39}{1600}$なので、

$$P\left(\left|\frac{Sn}{n} - \frac{1}{40}\right| > \frac{1}{100}\right) \leq \frac{10000}{\mathrm{n}} \frac{39}{1600}$$

がわかり、よって$\mathrm{n} > \frac{39}{1600} 10^6$と選べばいいみたいです…

まあこんな大量にガチャ回したらそりゃちゃんとした確率に近づいていきますよね

まぁ僕が言いたかったのはちゃんと確率と自分がガチャ回せる回数を見て有効的にガチャゲーを制そう！ってことでした〜

お付き合いありがとうございました！

順位

[redacted]					
1	ソフトバンク	63	47	4	-
2	西武	57	53	1	6
3	楽天	54	53	4	7.5
4	日本ハム	53	54	5	8.5
5	ロッテ	53	56	3	9.5
6	オリックス	51	56	5	10.5
[redacted]					
1	巨人	62	46	2	-
2	DeNA	58	52	3	5
3	広島	57	54	3	6.5
4	阪神	50	57	6	11.5
5	中日	49	60	2	13.5
6	ヤクルト	46	65	2	17.5

対戦成績

[redacted]						
ソフトバンク		11-9(0)	10-10(0)	13-6(1)	6-12(0)	12-5(1)
西武	9-11(0)		5-9(0)	8-10(0)	12-7(1)	13-8(0)
楽天	10-10(0)	9-5(0)		9-10(1)	6-10(2)	10-10(1)
日本ハム	6-13(1)	10-8(0)	10-9(1)		11-9(0)	8-6(2)
ロッテ	12-6(0)	7-12(1)	10-6(2)	9-11(0)		7-11(0)
オリックス	5-12(1)	8-13(0)	10-10(1)	6-8(2)	11-7(0)	
[redacted]						
巨人		8-8(0)	7-12(1)	13-6(0)	11-5(1)	12-8(0)
DeNA	8-8(0)		10-10(1)	7-10(1)	12-7(0)	11-10(0)
広島	12-7(1)	10-10(1)		10-11(0)	11-6(0)	9-8(0)
阪神	6-13(0)	10-7(1)	11-10(0)		7-12(1)	10-5(2)
中日	5-11(1)	7-12(0)	6-11(0)	12-7(1)		11-9(0)
ヤクルト	8-12(0)	10-11(0)	8-9(0)	5-10(2)	9-11(0)	

交流戦 結果

年度	セ・リーグ(勝	引き分け	パ・リーグ(勝ち)
2019	46	4	[redacted]
2018	48	1	[redacted]
2017	51	1	[redacted]
2016	47	1	[redacted]
2015	44	3	[redacted]
2014	70	3	[redacted]
2013	60	4	[redacted]
2012	66	11	[redacted]
2011	57	9	[redacted]
2010	59	4	[redacted]
2009	[redacted]	7	67
2008	71	0	[redacted]
2007	66	4	[redacted]
2006	107	1	[redacted]
2005	104	7	[redacted]
通算	966	60	1098
	1回		14回

オールスターゲーム 結果

通算	79勝	11分	85勝

開平とは？

10323　伊藤綾花

1.この研究を選んだわけ

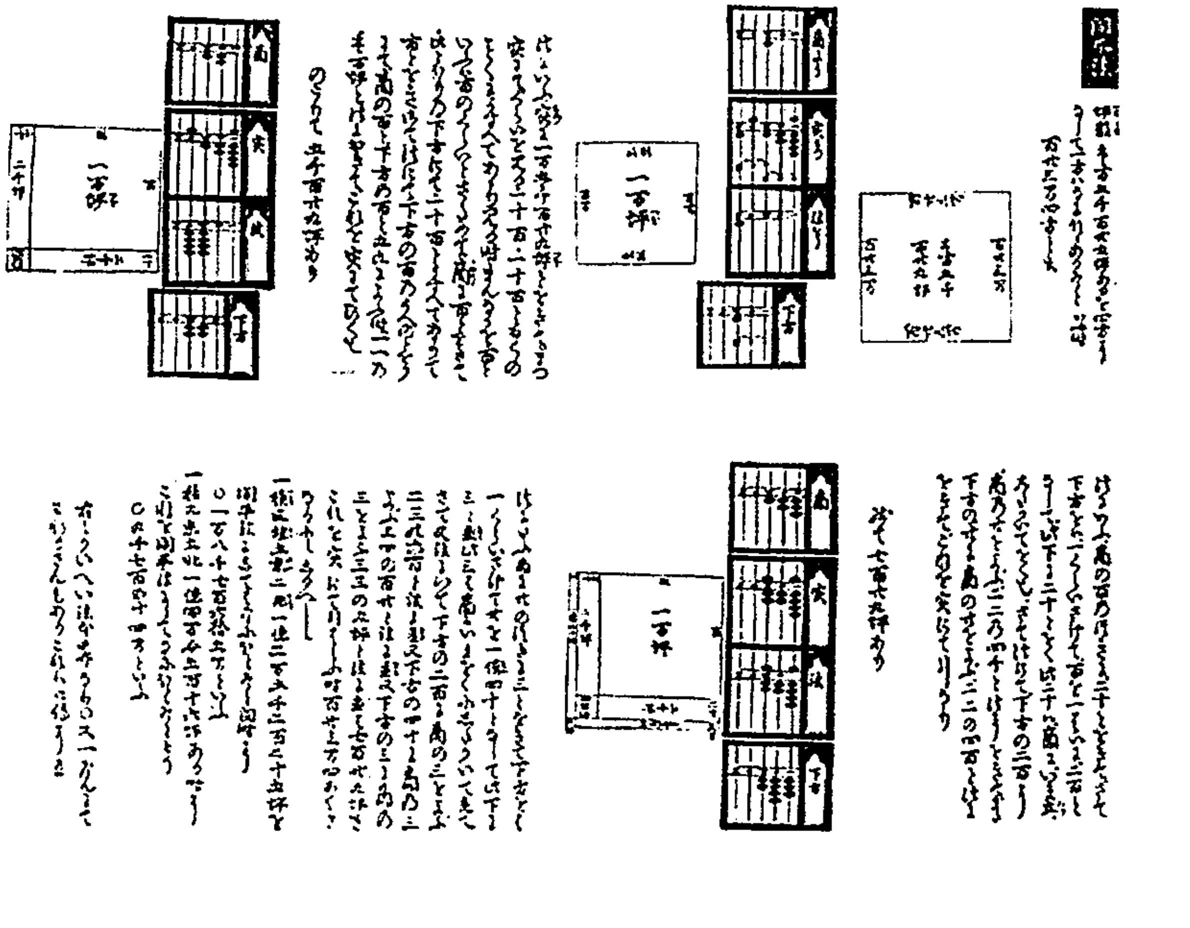
以前、そろばんを習っていた際に、そろばんを用いた開平法を学習した。日本の昔ながらの計算機“そろばん”で開平ができるのなら、古い歴史があるのではないか。また、それはどのような考え方に基づいて、開平法という解法が成り立っているのか、深く知りたいと思い、テーマとした。開平がどのように活用できるのかについても、深めていきたい。

2.開平の歴史

開平法は、「塵劫記」（じんこうき）という数学書に記載されている。そもそも「塵劫記」とは、江戸時代初期１６２７年に出版された数学書である。この本の著者、吉田光由（よしだみつよし）は、数学を理論として追及していたのではなく、土木工事などの実務に生かすスキルと考えていた。そのため、普段の生活に活用できる数学書として、大変人気があった本である。

下の図は実際に「塵劫記」に記載されている、開平法に関する問題の原文である。２ページの図は、その原文の現代語訳である。開平とは、与えられた正方形の面積から一辺の長さを求める計算のことで、「塵劫記」の開平法を、実際に記載されている例題をもとに、詳しく説明していく。

『塵劫記に記載されている開平法に関する問題の原文』



『上の図の現代語訳』

第25条　開平法

25－1：面積が15129坪の正方形の一辺を求めよ。すなわち、$\sqrt{15129}$ を計算せよ。

答）123間

法）まず商、実、法、下方の枠（そろばん）を設ける。

100	商
15129	実

① 実に15129とおく。

平方してこの数より小さくて近い数の桁を知るため

一 十 百、一 十 百と下からかぞえて、100の位で

あることを確認し、商に100とおく。

10000	法
100	下方

② この100を下方にも置く。

商の100と下方の100を乗して

10000　これを法に置く。

③ 法10000を実から引く

実は5129

法から10000を引く

100	商
5129	実
0	法
100	下方

④ 商の10位に20とおく。120になる。

下方を2倍の200にし、商の20を加えて220になる。

商に置いた20に下方の220を掛け

4400を法におく。

実の5129から法の4400を引く。

残りは実が729。法を除く。

120	商
729	実
4400	法
220	下方

⑤ 商の1の位に3と置く。123になる。

下方の20を2倍して40、これに商においた3を加え

243になる。

商においた3に下方の243を掛け729

これを法におく。

123	商
729	実
729	法
243	下方

実の729から法の729を引き、実は0。

商123が$\sqrt{15129}$である。

123	商
0	実
729	法
243	下方

25－2：352125225を開平せよ。

答）18765

※ここの数は「小乗」なので大乗では3億5212万5225のことである。

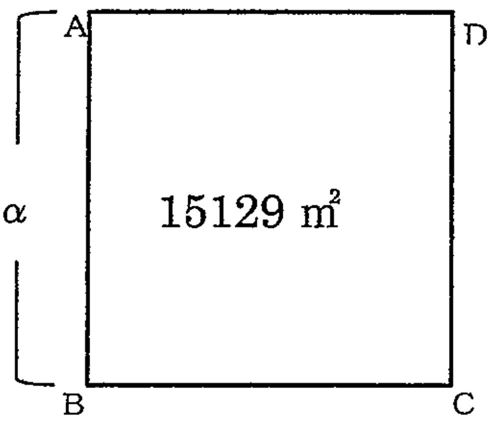
25－3：95140516を開平せよ。

答）9754

※ここも $\sqrt{95140516}$ の開平計算の問題である。

http://mathmath.sakura.ne.jp/tushin/68kusachi.pdf#search=%27%E5%A1%B5%E5%8A%AB%E8%A8%98+%E9%96%8B%E5%B9%B3%27

例題　面積が15129㎡の一辺を求めよ。（$\sqrt{15129}$を求めよ。）



① 正方形ABCDの一辺をαとする。

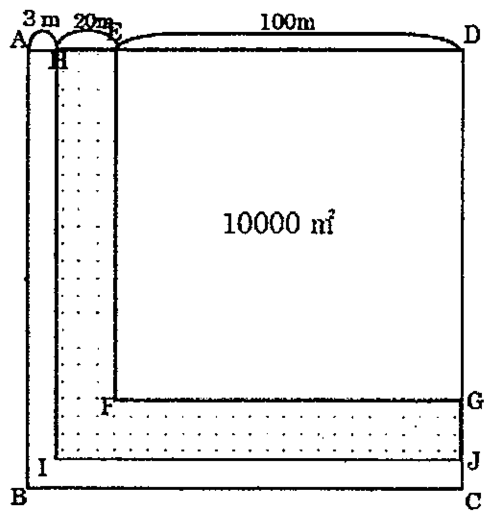
正方形ABCDの面積＝一辺×一辺

$15129 = \alpha \times \alpha$

$100 \times 100 = 10000$

$200 \times 200 = 40000$ より、

$100 < \alpha < 200$



② $\alpha \times \alpha$に数字を代入して、

あてはまる数字を探そうとしても、

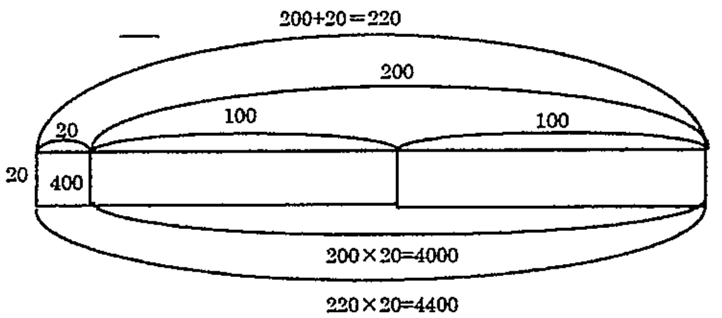
数字にきりがなく、うまくいかない。

→まず、$100 < \alpha$より、一辺10の

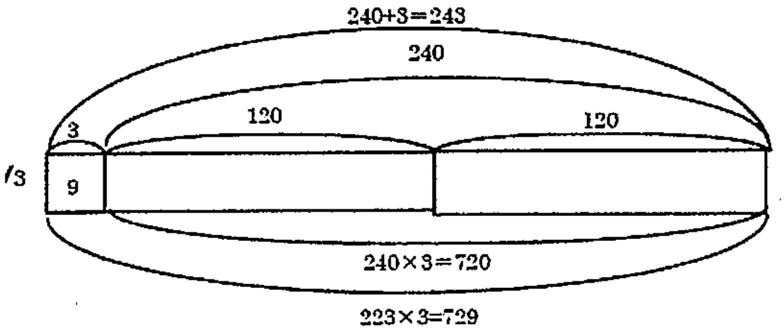
正方形EFGDを取り出す。

すると、残りはL字型ABCGFEで、

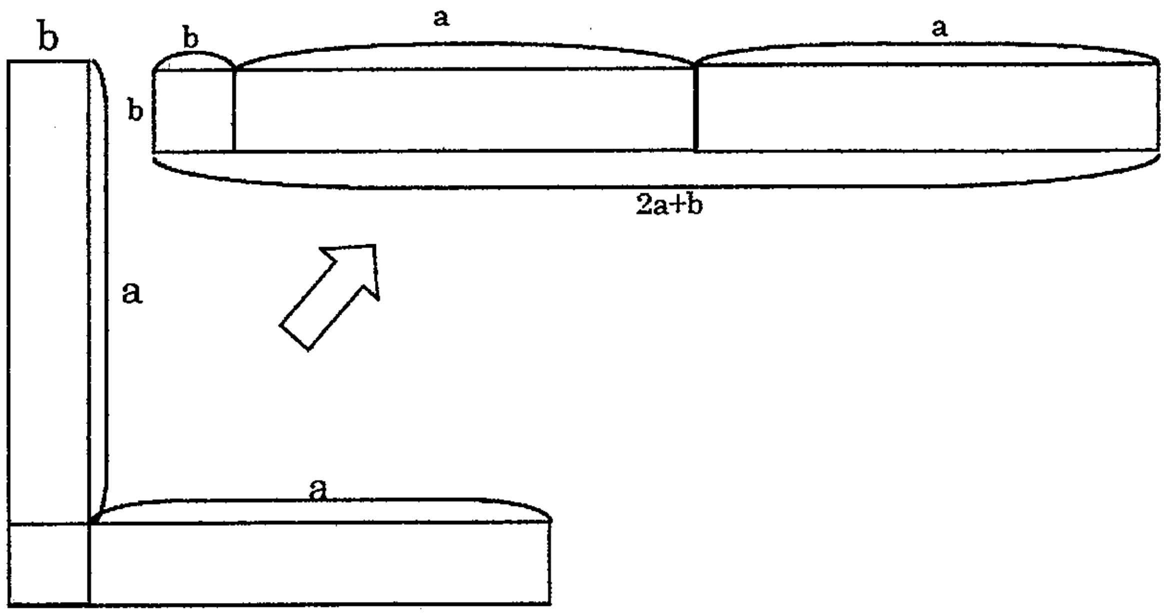
その面積は $15129 - 10000 = 5129$



③ L字型ABCGFEを下の図のように長方形に変形すると、
(2a+b) ×bで求めることができる。
a=EF=100より、(2×100+b) ×b
これが5129を超えないようにするためには、b=20
このとき、L字型HIJGFE
= (2×100+20) ×20=4400
残りのL字型ABCJIH
=5129−4400=729



④ L字型ABCJIHも同様に
(2a+b) ×bで求める。
a=HI=EF+GJ=120より、
(2×120+b) ×b
これが729を超えないようにするためには、b=3
このとき、L字型ABCJIH
= (2×120+3) ×3=729
余りなし



以上より、α=100+20+3=123　　　　一辺　123m

このように、まず正方形を取り出して、余ったL字型の図形を長方形として考えて、正方形の残りの長さを求めているのである。この解法が、吉田光由が紹介した開平法である。

3.筆算を用いた開平法

	1　2　3
1	$\sqrt{1\,\vert\,51\,\vert\,29}$
1	1
22	51
2	44
243	729
3	729
	0

開平法を筆算でやることもできる。

① まず、$\sqrt{15129}$と書き、小数点を基準に
二桁ずつに区切る。

② 二乗して、「右側の最も左のブロック(この場合 1)」
となるような最大の整数（この場合 1）を求める。
その数を右側に一か所、左側に二か所書く。
また、計算結果（この場合$1^2=1$）を右側に書く。

③ 左側は足し算、左側は引き算。

④ 「左側の数(この場合 2)の末尾に商の
上二桁目（Nとする）をくっつけたもの×N」が右側の次のブロックまで取ったもの
（この場合 51）以下となるような最大の整数N（この場合 2）を求める。
その数を右側に一か所、左側に二か所書く。
また、計算結果（この場合 22×2＝44）を右側に書く。

⑤ 以下、③と④を繰り返す

なぜ、このような計算の仕組みになるかを$\sqrt{X}$を用いて詳しく説明する。

まず, ①と②で$\sqrt{X}$の商の上一桁目を計算している。小数点を基準にして二桁ずつに区切り、X の桁数を考える。
そして「$\sqrt{X}$はだいたい a 」という評価が得られる。
（上の例だと, $\sqrt{15129}$はだいたい 100 という評価）
しかし, $\sqrt{X}=a$ だと、不十分。よって、$\sqrt{X}=a+\varepsilon$ であるとする。 ε を求めたい。
上式を変形すると, $X-a^2=\varepsilon(2a+\varepsilon)$
よって, $b(2a+b)$ が $X-a^2$をこえないようなもの b（b は商の上二桁目）を使って,
評価を「$\sqrt{X}$はだいたい a+b 」と更新する。
（上の例だと, $\sqrt{15129}$はだいたい 120 という評価）
④における計算結果(上の例だと 44) が $b(2a+b)$ 、
右側のブロックまで取ったもの(上の例だと 51) が $X-a^2$に対応している。
改めて, $\sqrt{X}=a+b$ だと、不十分。よって、$\sqrt{X}=a+b+\varepsilon$ であるとする。 ε を求めたい。
上式を変形すると, $X-(a+b)^2=\varepsilon\{2(a+b)+\varepsilon\}$
よって, $c\{2(a+b)+c\}$ が $X-(a+b)^2$ をこえないようなもの c （商の上三桁目）を使って,
評価を「$\sqrt{X}$はだいたい a+b+c 」と更新する。
（上の例だと、$\sqrt{15129}$はだいたい 123 という評価）
余りがなくなるまでこれを繰り返す。
ただし、計算を途中でやめて、四捨五入をしても良い。

4.開平法の活用

開平法の活用として、近似値や正方形の一辺を求めることができる。

《$\sqrt{11}$の近似値を求める》

$3^2<11<4^2$　より、$3<\sqrt{11}<4$ と$\sqrt{11}$の整数部分は３とだいたいの大きさを求めることができるが、小数点以下は求めることができない。

よって、筆算を用いて、小数点以下を求める。

7

3. 3 1 ~~6~~ ~~6~~・・

3	$\sqrt{11.\vert00\vert00\vert00\vert00}$
3	9
63	200
3	189
661	1100
1	661
6626	43900
6	39756
66326	414400
6	397956
66332	16444

＊計算は続くが、

小数点第四位を四捨五入

よって、$\sqrt{11}$の近似値は 3.317

《正方形の一辺を求める》

正方形の３９坪の土地の一辺を求める。

一辺をＸｍとする

１坪＝３.３０５７８５１２㎡

３９坪＝１２８.９２５６１９㎡

X^2＝１２８.９２５６１９

$X=\sqrt{128.925619}$

１１. ３ ５ ~~4~~・・・

1	$\sqrt{1\vert28.\vert92\vert56\vert19}$
1	1
21	28
1	21
223	792
3	669
2265	12356
5	11325
22704	103119
4	90816
22708	12303

＊計算は続くが、

小数点第三位を四捨五入

よって、Ｘ≒１１.３５

約１１.３５ｍ

5.結果・考察

開平法は、江戸時代に編み出された解法で、「塵劫記」に記載されている、とても古い歴史があるものだとわかった。吉田光由はある数の平方根を、正方形の面積から一辺を求めるとし、まず正方形を取り出して、残ったＬ字型の図形を長方形に変形させて、値を求めた。このような考え方を思いついたのも、容易に計算できる、電卓やコンピューターがない時代であったからこそであろう。また、開平法を用いて、ある数の平方根の近似値を求めることができることもわかった。$\sqrt{2}$≒１.４１４２１３５６（一夜一夜に人見頃）と語呂合わせがあるものだけでなく、$\sqrt{19}$といったよく問題に出てくるけど、近似値が分かりにくいものも、近似値を把握することができる。

6. 結論

「今の時代は、電卓やコンピューターを使って、平方根なんてすぐ出せるじゃないか！」と思う人もいるかもしれないが、ぜひとも、機械を使わずに平方根を求める方法を学んでほしい。なぜなら、昔の人が編み出した解法から、昔の人のユーモラスな、常識にとらわれない考え方を学ぶことができるからだ。自分がどれだけ、ひとつの方法にとらわれていたかがわかるだろう。私自身も、研究を通して、様々な資料に目を通していくうちに開平法だけでなく、「塵劫記」に記載されている、盗人算、花売りの算、油わけ算などの昔の人の生活に即した数学の考え方に大変驚いた。これから、数学を学んでいくうえで、ひとつの考え方にとらわれない、柔軟な思考を持ちたい。機会があれば、日本の数学だけでなく、西洋の数学も詳しく学んでみたい。

参考文献

・開平法のやり方と原理 | 高校数学の美しい物語
https://mathtrain.jp/kaiheihou
・和算問題の教材化 ―塵劫記の開平術に関する問題― 岡山市立千種小学校草地貴幸
http://mathmath.sakura.ne.jp/tushin/68kusachi.pdf#search=%27%E5%A1%B5%E5%8A%AB%E8%A8%98+%E9%96%8B%E5%B9%B3%27
・鳴海風「江戸の天才数学者　世界を驚かせた和算家たち」（２０１２年新潮社）
・西田知己「「塵劫記」にまなぶ」（２００５年研成社）
・小寺裕「江戸の天才達が開花させた和算の魅力に迫る！」（２０１６年Ｃ＆Ｒ研究所）
・佐藤健一「平成版「塵劫記」～おもしろ算術書のすすめ～」（２００９年明治書院）

タイトル	1年　3組　35番
巡回セールスマン問題	名前　中野　夕夏

《巡回セールスマン問題》　別名TSP

1. 研究の背景と目的

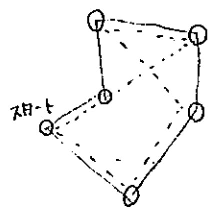
来週の土日曜日は、彼女と遊園地でデートだ！せっかくだから、いろんなアトラクションに乗りたい！でも、どうすれば1番効率のいいルートを見つけられるんだ…！高校生のみなさんならば、そんな風に頭を抱えたことの一度や二度はあるのではないだろうか。ちなみに私は(妄想の中でなら)ある。そんな時に見つけたのが、「巡回セールスマン問題」だった。これを使えば、最短ルートが分かると聞いた私は、実際に(架空の)デートコースを練ってみることにした。

2. 方法(内容)

○そもそも「巡回セールスマン問題」とは??

↳ セールスマンが所定の複数の都市をちょうど1回だけ巡回する場合の最短経路を求める組合せ最適化問題である。NP困難と呼ばれる難しい問題のクラスに属する。

※特殊ケースのハミルトン閉路問題はNP完全というクラス。

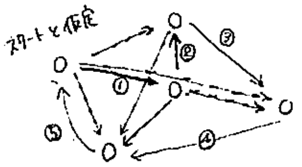


・どれが最短？という問題
⇒ 巡回セールスマン問題

・一筆描きでいける？という問題
⇒ ハミルトン閉路問題

○何が難しいの??

↳ 目的地の数をnとおくと、それを巡るルートはn!となる。



n = 4
4 × 3 × 2 × 1
= 24 (コース)

目的地が4つなら、かわいいものだが、たとえば、巡りたい場所が100か所あったとする。すると、ルートは100!通りとなり、これは158桁にもなる。

ざわざわ

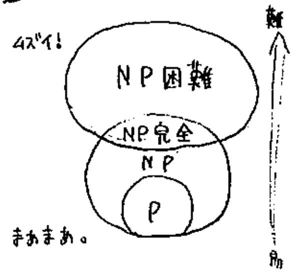
これをすべて検証するとなると、アホみたいな時間がかかるので、確実な解を出すことはできない。だから、難しい！と判断され、「NP困難」な問題となる!!

○解き方は??

↳ 分枝限定法、切除平面法、焼きなまし法 etc.
いろいろあったが、今回は局所探索法を使うことにした。

① 一旦ストップ！

問題のクラス分けとは？



前提 NP≠P

証明すると1億円!!

P … 判定問題のうち、現実的な時間で解けるもの。

NP … 判定問題のうち、yesとなる証拠が与えられたとき、それが正しいか現実的な時間で示せるもの。※noだと証明不可能。

NP困難 … NPに属する任意の問題と比べて、少なくとも同等以上に難しいもの。
(=)NP困難を解ける機械があれば、NPも解ける。てきな。

NP完全 … NPかつNP困難。
つまり高レベルなNP。

※判定問題
=「ある性質をもっているか」を答える

[巡回セールスマン問題における局所探索法とは!]

前提: 問題の条件を満たす解をひとつはもっている。

すべての目的地を通っていること、一周巡って元の場所に戻っていること等

・その解の一部を(局所的な部分)を修正・改善した解をいろいろと作成し、その中を探索して、現在の解よりもよい解があればそちらに移る。

・よりよい解が得られ続ける限り反復する。

例 ・まずスタートから1番近い目的地へ行き、そこからまた近い目的地へ… というのを繰り返してルートをつくっていく。(図1)

・ここから、ルートが交差している部分を修正したり、

・ルートがより円に近づくよう改善していく。(図2)

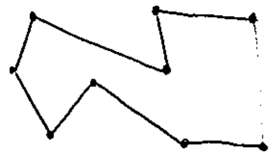
・ルートに改善の余地がなくなったら、完成!

[図1]

赤2本を入れ替えて…

⇒

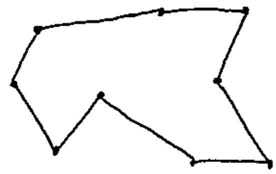
[図2]



赤と緑の組み方を変えて…

⇒

[図3]



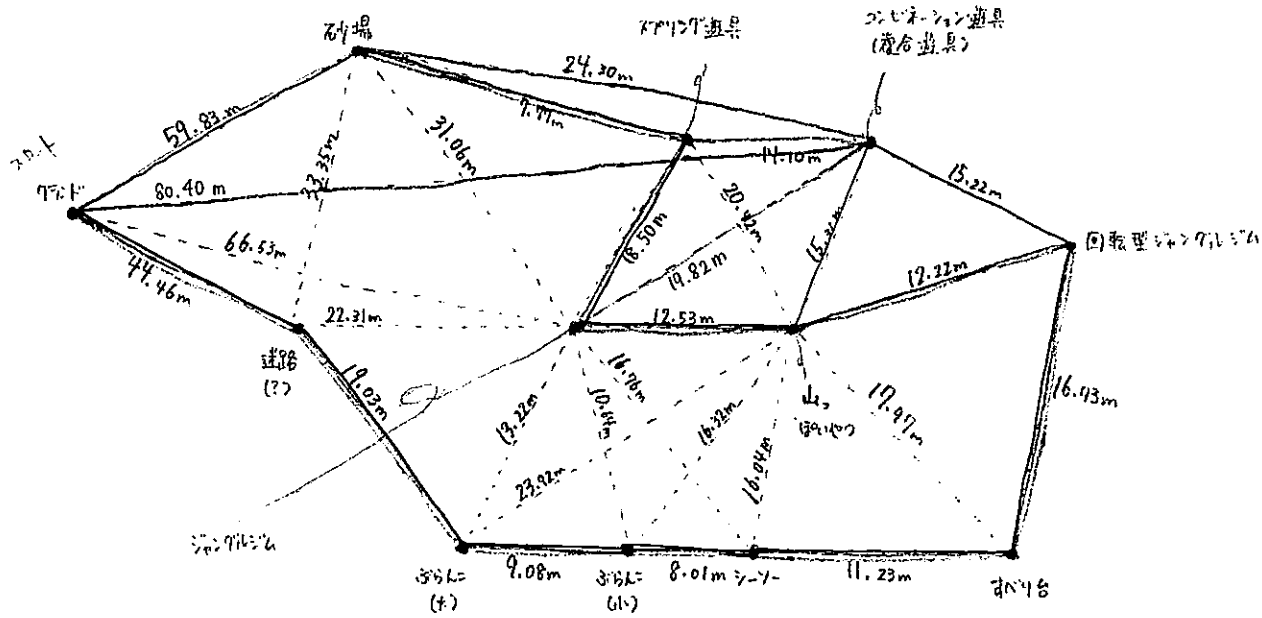
完成!!

○実際にやってみよう!!

↳実際にやるにあたって、様々な事情によりいわゆる遊園地ではできなかったので、私にとっての遊園地である「千種公園」で実践してきた。

3. 結果・考察

↓千種公園 園内マップ。



○結果
↳ 1回目 264.26m
＊線が交差している部分があったので、そこを修正する。
2回目 234.81m
＊ルートの形をなるべく円に近づけるべく、改善。
3回目 237.70m
＊2回目よりも総移動距離が長くなっているので、終了。

➡緑のルートが最適解であることがわかった。
あとはこのマップを持って、千種公園、又は、千種公園と同じ配置の遊園地へ意中の人を誘うだけ!!。きっと、気になる理系のあの子なら、「えっこの人私のために巡回セールスマン問題を!? トゥンク…!」となってくれるはずだ! ただし、意中の人が文系の方はこのマップは隠すべきだろう。普通に引かれる。

4. 結論

今回の研究では「巡回セールスマン問題」という問題を扱ったが、これは、わたしが思いつく限りデートコース立案をしたい時に最も使える「数学」だと思う。調べてみると、このような最適化問題には他にも「ナップサック問題」(何をどのように詰めるのが最もよいかを問うもの)などの日常に密接に関係するものが多く見つかった。一見数学とは思えないパズルのような問題だが、そう考えると、私たちの周りにはたくさんの「数学」が隠れているのではないだろうか。この研究を通して私は数学というものを少し身近に感じられるようになった気がする。みなさんも身の周りの「数学」を探してみてはいかがだろうか。

5. 参考文献

＊インターネットサイト
・高校数学の美しい物語
・百億年かかっても解けない問題
・教えてgoo!
・ウィキペディア
・okunoin's blog
・大人になってからの再学習
・京都大学 永持研究室
＊書籍
・理系が恋に落ちたので証明してみた。2巻

パラドックスに関する調査

10401　淺野大地
10415　杉原敬悟

今回僕たちは、パラドックスについて調査した。

＜動機＞

日常会話の中で頻繁に目にする「矛盾」。今回それらの代表的なものについて調べ、考えることで、論理的な思考、判断の一助にしようと考えた。

普段複雑であまり深くは考えようとしたことがないパラドックスだが、自らで論理を立てて、わかりやすい形にまとめることで、一つの良い知識を得られると期待している。

抜き打ちテストのパラドックス
<内容>
学校の教師が、金曜日、このようにいった。
「来週、月曜から金曜の間のどこかの日に、抜き打ちテストを行う。」と
それを聞いたある生徒が、
「先生はテストを行うことができはしない。」といった。
なぜかと聞いてみると、
「金曜までにテストがなければ、金曜にあるとわかってしまうから、テストが抜き打ちにならず金曜はない。
それと同じ論理で、月曜までテストは行えない、つまり来週の間にテストは行われない。」ということだ。
と、こういう内容である。
その後、次の週になり、せいとは余裕で待ち構えていた。しかし、先生は、木曜日、抜き打ちテストを行った。生徒は抗議したが、先生は、
「抜き打ちテストがないと思っていないところにテストをおこなったのだから、これは抜き打ちテストになっているぞ。」といった。
さて、これはどういうことだろう。
<ポイント>
先生が宣言したことは、次の二つに分類される。
①月曜から金曜の間にテストを実施する。
②生徒が予想できる日には、テストを実施しない
しかし、このことを生徒が両方とも信じることはない。信じた場合、上に示した通り、矛盾が生じてしまうからである。
<考察>
では、なぜ上のようなことが起きてしまうのだろうか。
生徒は、上の二つを両方信じることはない。そのため、どちらか片方を信用するか、どちらも信用しない（テストが行われないことを信じる)ことになる。
ここで、生徒はどちらかを信用するが、先生は、そのどちらかを好きに選択できる。
そのため、生徒の思惑とは逆のほうを選択することで、生徒の予想を裏切り、生徒の予想を的中させないようにできるのである。
この問題は、生徒が抜き打ちテストに対して、予想を行うために論理に矛盾が生じるのであって、①と②が根本的には矛盾していないところにある。
<まとめ>
このように、範囲を決めて予告された抜き打ちテストでは、受けさせられる側の予想は決して当たらないようにできてしまうのである。皆さんは、一抜き打ちされてもいいように、普段から対策をしっかりしておこう。

パラドックス…日本語では「逆説」と表される。一見正しそうだが間違っている話や一見間違っていそうだが実は正しい話のことを指す。

ゼノンのパラドクス(アレキスと亀)の論理崩壊

パラドクスの内容については敬称略

崩壊のポイント

無限の点を通過するのに無限の時間は必要ない。

証明

アキレスと亀が競う距離は１０m、アキレスの走る速度は秒速１０mとし、亀の初期位置Aは中間地点の5m、速度は秒速5mとする。

アキレスが地点Aまでにかかる時間は1/2秒で、その間に亀は2.5m進む。そこからその中間地点Bにつくには1/4秒…と延々と続いていく。これを式に表すと、

1/2+1/4+1/8+1/16….

この式の答えをSとすると

S=1/2+1/4+1/8+1/16…　①

2S=1+1/2+1/4+1/8+1/16…　②

②−①

S=1

よってアレキスが

１０mを走りきるのに要する時間は1秒である。　証明終了

本当に証明は完了したのか？

無限の点を通過するという作業に限りなんてあるものなのか？

例えば１０mの線分上を走るとする。線分は無限の点の集まりで点と点の間を通過するのにも少なくとも時間を要する。つまり、無限の点を通過する作業には無限の時間が必要であるということになる。本来ならば1秒でつけるというのに。

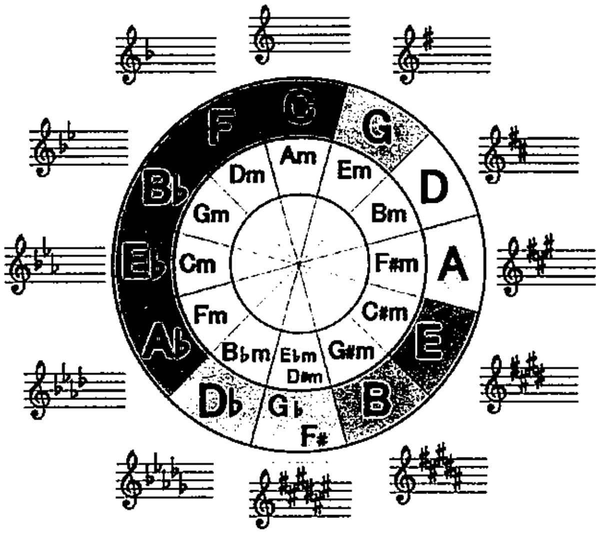
ここに新たなパラドクスが発生する。

発想を逆転させる。「線分は点の集まりである」から「線分を切り取ったものが点になる」に。このように考えるとアレキスが無限の作業をするという考えには至らない。なぜならアレキスのおこなった作業は線分間を移動するというただ一つになるからである。そう考えるとアレキスがこの作業を行ったときには点は存在しておらず、その後説明するときに完結したものを無限に説明することは可能だが、それはアレキスが永遠にゴールにたどり着けないという証明にはならない。

＜総括＞
今回パラドックスについて調べてみて共通している点として考えられるのは、パラドックスの論理の途中で読み手には気づかれないような些細な論点のズレを作っていることだ。読んでいる上ではあまり気づかないようなズレだが、そのズレはそれだけでパラドックスを完成させるような大きなものだったのだ。このように話の中には小さく大きなズレや真実が隠されていることが分かった。僕たちも日々の暮らしの中に存在するズレや真実を見逃さないように生活することを心掛けたいと思う。また、今回紹介したものはパラドックスのほんの一部に過ぎず、さらにword 1 ページ分で説明できるものだった。他のパラドックスには言葉で説明するものが難儀なものや理解が追い付かないものがたくさんある。正直な話、今回説明したものでも本当にそうなのか、未だに理解に苦しむ部分もあった。しかし、大学生、社会人になってからもう一度確認することで、今はわからないものでも理解できるようになるかもしれない。そんなことを期待しながらこの課題を修了する。

数学と調性

104 17 中村優佑



1.始めに

音楽には五度圏という言葉がある。音楽では、調号が1つつくたびに調の主音が完全五度上下する。これの一般的なすべての調合の場合を図で表したのが五度圏である。

五度圏が示していることは、音楽の調性には法則性がみられるということである。よって、これを数学を利用して法則を抽象化をすれば、調性を簡単に俯瞰できるようになるのではないかと考えた。

2.目標

「調性を俯瞰すること」では曖昧なため、今回のレポートで概ねこれを達成したといえるような目標を設定する。

・数学を利用した調号から調の素早い判断
・数学を利用した調から調号の素早い判断

この2点を達成することを目標とする。

3.音の定義

ピアノを想像し、鍵盤1つ1つに数字を与えていく。

ド	ド#	レ	レ#	ミ	ファ	ﾌｧ#	ソ	ソ#	ラ	ラ#	シ	ド	ド# …
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13 …

今回は、高いドや低いドなどは考慮しないため、12で割った時の余りに注目する。よって、12を法として、以下の表で音を定義する。

ド	ド#	レ	レ#	ミ	ファ	ファ#	ソ	ソ#	ラ	ラ#	シ
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

4.数学を利用した調号から調の素早い判断

音の定義を利用して、調号がついた時の主音の動きをいくつか試し、それを抽象化する。

<試行>

（1） #が1つの場合

主音が完全五度上がるため、0から7になる。7が主音の調を求めればよい。よって、ト長調（ホ短調）である。

（2） #が2つの場合

主音が完全五度2回分上がるため、0から14になる。$14\equiv 2$ のため、2が主音の長を求めればよい。よってニ長調（ロ短調）である。

（3） ♭が1つの場合

主音が完全五度下がるため、0から-7になる。$-7\equiv 5$ のため、5が主音の調を求めればよい。よって、ヘ長調（ニ短調）である。

（2）＃が２つの場合

主音が完全五度２回分上がるため、0から14になる。$14\equiv 2$ のため、2が主音の長を求めればよい。よってニ長調（ロ短調）である。

（3）♭が１つの場合

主音が完全五度下がるため、0から-7になる。$-7\equiv 5$ のため、5が主音の調を求めればよい。よって、ヘ長調（ニ短調）である。

（4）♭が３つの場合

主音が完全五度３回分下がるため、0から-21になる。$-21\equiv 3$ よって、3が主音の長を求めればよい。よって変ニ長調（変ロ短調）である。

<抽象化>

（1）～（4）から、＃が１つ増えるたびに主音が+7され、♭が１つ増えるたびに主音が-7されていることがわかる。そして＃や♭の数の変化に伴う主音の移動はどの場合でも同様なためこれは成り立つ。

これを数式で表す。#, ♭の数をxとし、主音をyとすると、12を法としたとき、

#が調号のとき　$y\equiv 7x\ (0\leqq x\leqq 6)$

♭が調号のとき　$y\equiv -7x\ (0\leqq x\leqq 5)$

と表せる。これを利用すれば、簡単に調の素早い判断が可能になるだろう。

<数式の整理>

２つの合同式を１つにまとめることができればより素早い判断が可能となるため、本項ではその整理を行う。

５度圏に注目すると、＃のついた調と♭のついた調はつながっていることがわかる。実際に、♭が５つの調号は＃が７つの調号とも捉えることができる。これは、調号の変化と主音の移動は画一的に捉えられるということを示している。

続いて上の方の合同式に注目すると、♭の数と同じ絶対値の負の数を代入しても成り立つ。よって、２つの合同式は次のようにまとめることができる。

（＃の数）と－（♭の数）をxとし、主音をyとすると、

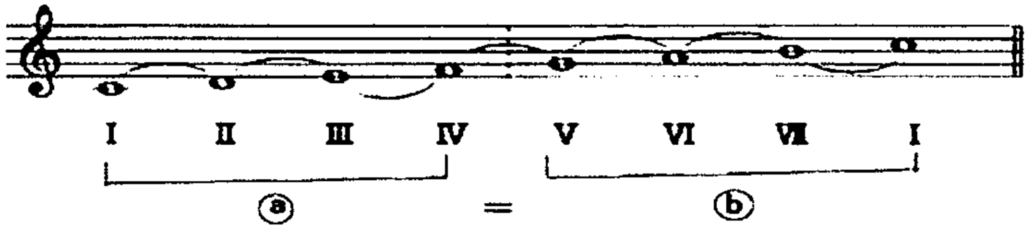
$$y\equiv 7x \quad (-5\leqq x\leqq 6)$$

5.数学を利用した調から調号の素早い判断

調号の歴史に着目すると、調号のつきかたに法則性を見出せる。

<テトラコード>

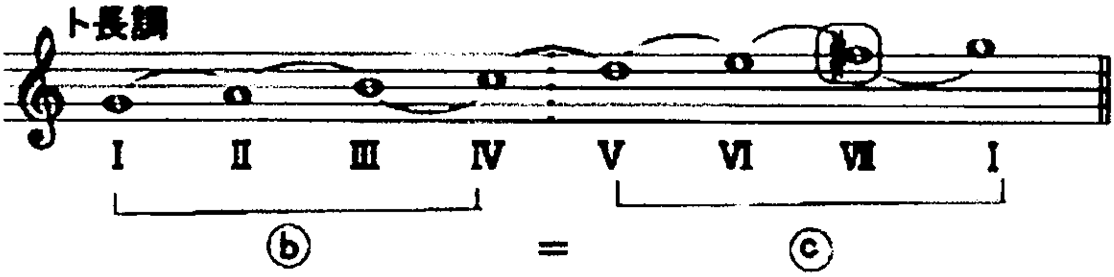
12種類の調ができたのは、テトラコードという音のまとまりとその組み合わせがあったからである。テトラコードとは、「４つの音の集合」である。（下図でいうaとb)



長調の場合、「全音　全音　半音」という音の並びをもつ4つの音の集合が使われている。
そして、この組み合わせが美しい響きを放つときにそれは調として扱われた。
美しい響きを放つ条件として、次の二つがある。

1.2つのテトラコード始めの音がが5度音程
2.1つめのテトラコードの終わりの音と次のテトラコードの始めの音が全音関係

これを利用し、ハ長調のテトラコードを基準として、次のように#を使った6個の調ができた。
（1）2つめのテトラコードを1つ目のテトラコードとする。
（2）新しい1つめのテトラコードをもとにして2つめのテトラコードを調ができるように組み合わせる。（下図参照）



ここで、都合の良いテトラコードを組み合わせる際、その時作る調の第7音に#がつく。
さらに、（1）（2）で完全五度の間隔で調が作られていくため、#も完全五度の間隔でつくことになる。

また、♭の調号の調も、次のようにテトラコードの考え方を使って5つ作られた。
（1）1つめのテトラコードを2つ目のテトラコードとする。
（2）新しい2つめのテトラコードをもとにして1つめのテトラコードを調ができるように組み合わせる。（下図参照、ⓐは1オクターブ上がっている）

フラットが付く場合でも同様に、テトラコードを組み合わせるときに常に第4音に♭が付く。そして、こちらも完全5度の間隔でついていく。

<抽象化>
このことより、以下のことが分かった。

・#は第7音につき、♭は第4音につく。⇒始めは#は5、♭は11につく。
・#は完全5度の間隔でつく位置が上がっていき、♭は下がっていく。

これを使って#、♭の調号の付く位置を次のように導き出すことができる。
（1）4.で導いた合同式に、先に主音の数を代入して調号の種類と数を求める。
（2）この項でまとめた2つの性質に沿って調号の位置を求める。

これによって素早く調号の判断ができると考える。

5.感想

今回の学習では、合同式の概念と、テトラコードの概念が肝となっており、どちらも履修していない考え方だったので、多少の説明しかしていないが自分の理解の不足を感じた。
また、生活の一部を数学でとらえるという試み自体に難しさを感じた。特に定義に苦労した。生活を数学で扱いやすいように抽象度を高めるのには、高い想像力が必要だと感じた。一方で学習が進んでいくうちに、抽象度を高めることの便利さを感じた。このレポートで導き出した式は音楽のテストの範囲内であるし、これを利用すれば簡単に導けるようになるという実感が特にそう思わせてくれた。これからは数学の眼鏡をかけて物事を見ていくことで、少しでも面倒なことを簡単にできればいいと思う。

6.参考

https://dn-voice.info/music-theory/godoken/
https://jp.yamaha.com/services/music_pal/study/score/scale/index.html
https://www.jazzguitarstyle.com/origin-of-scale

連分数と超幾何級数

旭丘高等学校　1年5組14番　手塚亮佑

Abstract

I had known about continued fraction. And while examining them, there was a continued fraction display of natural log base $\boldsymbol{e}$, and $\boldsymbol{\pi}$. I was interested in how to derive them and I decided to deepen my knowledge of continued fraction.

§1　動機と目的

自分は以前から連分数というものを知っていた。そしてそれらを調べている中に自然対数の底 $\boldsymbol{e}$ や $\boldsymbol{\pi}$ の連分数表示があった。自分はそれらの導出方法に興味を持ち、連分数についての知識をさらに深めることにした。

§2　前提知識Ⅰ 連分数

まず連分数とは何なのか。それは以下の通りである。

定義 2. 1

有限複素数列$\{a_n\}\{b_n\}$について連分数以下の形のことを指す。

$$\boldsymbol{x = a_0 + \frac{b_1}{a_1 +}\frac{b_2}{a_2 +}\frac{b_3}{a_2 +}\cdots\frac{b_n}{a_n}}$$

$$\boldsymbol{= a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{\cdots + \cfrac{b_n}{a_n}}}}}$$

また、極限の概念により、無限数列$\{a_n\}\{b_n\}$についても考えることができ、

$$\boldsymbol{x = a_0 + \frac{b_1}{a_1 +}\frac{b_2}{a_2 +}\frac{b_3}{a_2 +}\cdots}$$

$$\boldsymbol{= \lim_{n\to\infty} a_0 + \frac{b_1}{a_1 +}\frac{b_2}{a_2 +}\frac{b_3}{a_2 +}\cdots\frac{b_n}{a_n}}$$

と定義することができる。

連分数でも特に$\boldsymbol{b_n = 1}$の時、正則連分数といい次のように表される。

$$\boldsymbol{x = \{a_0; a_1, a_2, a_3, \dots\}}$$

$$\boldsymbol{= a_0 + \frac{1}{a_1 +}\frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_2 +}\cdots}$$

またある数$\boldsymbol{x}$についての正則連分数表示$\boldsymbol{\{a_0; a_1, a_2, a_3, \dots\}}$を求めることを正則連分数展開する、という。

例 2. 1　有理数の連分数展開

例として$\boldsymbol{\frac{\overset{115}{\cancel{109}}}{79}}$を正則連分数展開する。

$$\frac{\overset{115}{\cancel{109}}}{79} = 1 + \frac{36}{79}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{79}{36}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{7}{36}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{36}{7}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{7}}}$$

このようにして連分数展開が完了する。
実は有理数の正則連分数展開は必ず有限回数で終了する。その逆も成り立つ。証明はそこまで難しいものではないので、各自に委ねる。(ユークリッドの互除法と同様である。)
例 2.2 二次無理数の連分数展開

黄金数$\boldsymbol{\varphi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$を正則連分数展開する。

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

この式を代入することを繰り返すと

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\cdots}}}}}}$$

となる。
実は二次無理数(整数係数に次方程式の解になりうるもの)の連分数展開は必ず循環することが知られている。その逆も成り立つ。証明はとても難しい。
例 2.3 その他の数の連分数展開

他の数の連分数展開は次のようになる

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}$$

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}$$

また以下のようにな超越数についても連分数展開ができるが、規則のあるものと規則のないと考えられているものがある。

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}}}}$$

$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}}}}$$

また正則でない連分数展開として以下のようなものが知られている

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{5+\cfrac{5}{\cdots}}}}}}$$

$$\pi = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \cfrac{7^2}{6 + \cfrac{9^2}{6 + \cfrac{11^2}{\cdots}}}}}}$$

§3 前提知識Ⅱ　超幾何級数

Gauss の超幾何級数は以下のように定義される

$$F(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r; b_1, b_2, b_3, \ldots, b_s; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, n)(a_2, n)(a_3, n) \ldots (a_r, n)}{(b_1, n)(b_2, n)(b_3, n) \ldots (b_s, n)(1, n)} x^n$$

$$(a, n) = a(a+1)(a+2) \ldots (a+n-1) = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}$$

次のようにいくつかの関数は超幾何級数を使って表すことができる。

$$e^x = F(-;-;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$(1-x)^a = F(a;-;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2) \ldots (a+n-1)}{n!} x^n$$

$$cosx = F\left(-; \frac{1}{2}; -\frac{x^2}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^n$$

$$log(1+x) = xF(1,1;2;-x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$$

$$Arctanx = xF\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -x^2\right) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}$$

これらの式はそれぞれの関数 Taylor 展開を変形することによって得ることができる。

§4 本題　e と π の連分数展開

まず e の連分数展開から考える。

$$F(a; b-1; x) - F(a+1; b; x) =$$

$$\left\{1 + \frac{a}{(b-1)1!} x + \frac{a(a+1)}{(b-1)b2!} x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)}{(b-1)b(b+1)3!} x^3 + \cdots\right\}$$

$$-\left\{1 + \frac{(a+1)}{b1!} x + \frac{(a+1)(a+2)}{b(b+1)2!} x^2 + \frac{(a+1)(a+2)(a+3)}{b(b+1)(b+2)3!} x^3 + \cdots\right\}$$

$$=\frac{ab-(a+1)(b-1)}{(b-1)b1!}x+\frac{(a+1)\{a(b+1)-(a+2)(b-1)\}}{(b-1)b(b+1)2!}x^2$$

$$+\frac{(a+1)(a+2)\{a(b+2)-(a+3)(b-1)\}}{(b-1)b(b+1)(b+2)3!}x^3+\cdots$$

$$=x\left\{\frac{a-b+1}{(b-1)b1!}+\frac{(a+1)(2a-2b+2)}{(b-1)b(b+1)2!}x+\frac{(a+1)(a+2)(3a-3b+3)}{(b-1)b(b+1)(b+2)3!}x^2+\cdots\right\}$$

$$=\frac{(a-b+1)x}{(b-1)b}\left\{1+\frac{(a+1)}{(b+1)1!}x+\frac{(a+1)(a+2)}{(b+1)(b+2)2!}x^2+\cdots\right\}$$

$$=\frac{(a-b+1)x}{(b-1)b}F(a+1;b+1;x)$$

$$\frac{F(a;b-1;x)}{F(a+1;b;x)}=1+\frac{(a-b+1)x}{(b-1)b}\frac{F(a+1;b+1;x)}{F(a+1;b;x)}$$

$$\frac{F(a+1;b+1;x)}{F(a;b;x)}=\frac{1}{1+\dfrac{(a-b)x}{b(b+1)}\dfrac{F(a+1;b+2;x)}{F(a+1;b+1;x)}}$$

同様にして

$$\frac{F(a+1;b+2;x)}{F(a+1;b+1;x)}=\frac{1}{1+\dfrac{(a+1)x}{(b+1)(b+2)}\dfrac{F(a+2;b+3;x)}{F(a+1;b+2;x)}}$$

これらを使って

$$\frac{F(a+1;b+1;x)}{F(a;b;x)}=\frac{1}{1+\dfrac{(a-b)x}{b(b+1)}\dfrac{F(a+1;b+2;x)}{F(a+1;b+1;x)}}$$

$$=\frac{1}{1+\dfrac{\dfrac{(a-b)x}{b(b+1)}}{1+\dfrac{(a+1)x}{(b+1)(b+2)}\dfrac{F(a+2;b+3;x)}{F(a+1;b+2;x)}}}$$

$$=\frac{1}{1+\dfrac{\dfrac{(a-b)x}{b(b+1)}}{1+\dfrac{\dfrac{(a+1)x}{(b+1)(b+2)}}{1+\dfrac{(a-b-1)x}{(b+2)(b+3)}\dfrac{F(a+2;b+4;x)}{F(a+2;b+3;x)}}}}$$

$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{\cfrac{(a-b)x}{b(b+1)}}{1+\cfrac{\cfrac{(a+1)x}{(b+1)(b+2)}}{1+\cfrac{\cfrac{(a-b-1)x}{(b+2)(b+3)}}{1+\cfrac{\cfrac{(a+2)x}{(b+3)(b+4)}}{1+\cfrac{\cfrac{(a-b-2)x}{(b+4)(b+5)}}{1+\cdots}}}}}}$$

$$=\cfrac{1}{b+\cfrac{(a-b)x}{b+1+\cfrac{(a+1)x}{b+2+\cfrac{(a-b-1)x}{b+3+\cfrac{(a+2)x}{b+4+\cfrac{(a-b-2)x}{b+5+\cdots}}}}}}$$

ここで$a=0$と置くと

$$F(1;b+1;x)=\cfrac{1}{b+\cfrac{-bx}{b+1+\cfrac{x}{b+2+\cfrac{-(b+1)x}{b+3+\cfrac{2x}{b+4+\cfrac{-(b+2)x}{b+5+\cdots}}}}}}$$

更に$b+1$をbに置き換え、整理すると

$$F(1;b;x)=\cfrac{1}{1+\cfrac{-x}{b+\cfrac{x}{b+1+\cfrac{-bx}{b+2+\cfrac{2x}{b+3+\cfrac{-(b+1)x}{b+4+\cdots}}}}}}$$

$b=1,x=1$と置くと

$$F(1;b;x)=e=\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3+\cfrac{2}{4-\cfrac{2}{5+\cdots}}}}}}$$

となり、eの連分数表示を得られる。

πについても同様に計算すると以下の式が得られる。

$$F(1,b;c;x)=\cfrac{1}{1+\cfrac{-bx}{c+\cfrac{(b-c)x}{c+1+\cfrac{-c(b+1)x}{c+2+\cfrac{2(b-c-1)x}{c+3+\cfrac{-(c+1)(b+2)x}{c+4+\cdots}}}}}}$$

$b=\frac{1}{2}, c=\frac{3}{2}$, と置き、$x$を$-x^2$に置き換えると

$$F\left(1,\frac{1}{2};\frac{3}{2};-x^2\right)=\frac{Arctanx}{x}=\cfrac{1}{1+\cfrac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{3}{2}+\cfrac{x^2}{\frac{5}{2}+\cfrac{\frac{9}{4}x^2}{\frac{7}{2}+\cfrac{4x^2}{\frac{11}{2}+\cfrac{\frac{25}{4}x^2}{\frac{13}{2}+\cdots}}}}}}$$

$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{4x^2}{5+\cfrac{9x^2}{7+\cfrac{16x^2}{11+\cfrac{25x^2}{13+\cdots}}}}}}$$

$x=1$と置き、両辺に 4 をかけると

$$\pi=\cfrac{4}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{4}{5+\cfrac{9}{7+\cfrac{16}{11+\cfrac{25}{13+\cdots}}}}}}$$

という表示を得られる

§5 今後の課題・感想

超幾何級数の計算をするのがとても大変だった。

まだ、eの正則連分数の導出方法が分かっていないので、これから調べたい。

§6 参考文献

野崎昭弘: πとeの連分数展開とその数値計算法

黒崎涼太: Jacobi, Stieltjes, Gauss 連分数の解析的性質について

Henry Cohn: A Short Proof of the Simple Continued Fraction Expansion of e

Thomas J. Osler: A PROOF OF THE CONTINUED FRACTION EXPANSION OF $e^{1/M}$

数学を極めれば、私たちは芸術家になれるのか

～M.C.エッシャーに学ぶ、だまし絵の数学～

彦坂美晴　春日愛実　得永ゆらら

1 研究の背景と目的

皆さんは絵をうまく書きたいと思ったことは無いだろうか。私たちは今まで、夏休みにポスターを描かされ美術で自画像を描かされなぜかそれに ABC の評価が付けられ、高校受験で内申という名の数値に変えられた。私の中 1 の美術評定は 2 であった（誰得)。どうしたら絵をうまく描くことができるのか、これは才能なのか？個人的に私は才能だと思っているが、それではこのレポートが終わってしまうので、今回は数学的な考え方を使うことでうまい絵が描けると仮定し、検証していく。実際ポスターの入賞作品を見ていても、滑らかな線や複雑な色の配色の美しさだけでなく、線の組み合わせ方による現実的な立体感と構図が、絵をうまく見せているようにも思える。そこで、数学的な手法を絵画に取り入れた芸術家として、オランダの M.C.エッシャーの画法に注目し、どうすれば彼のような非現実な絵をリアルに描きだすことができるのか、分析していくこととした。さあ、数学を極めれば、私たちは芸術家になれるのか。

2 方法

ここでは、なぜ私たちは平面上の絵を立体的に捉え錯覚さえ起こしうるのかという「絵の見え方」と、実際にどういう論理でエッシャーの不可能な図形は生み出されているのかという方法論の大きく 2 つに分けて解説していく。

Ⅰ.なぜ人は錯覚するのか

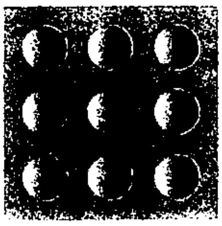
私達が絵から立体を知覚できるのは単眼立体視の原理による。この単眼立体視は明確な数理的原理に基づいたものではない。1 枚の画像だけから立体を知覚できるという人の知覚現象を総称して単眼立体視と呼んでいるだけである。

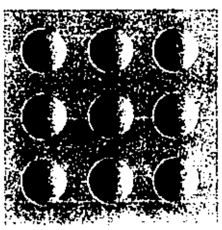
人は見たことのない画像からも奥行きを知覚できる。これは、人は生活の中で蓄えた、立体と画像の関係に関する多くの手がかりを総合的に利用して、奥行きを判断しているためだと考えられる。

手がかりの例

・明るさの手がかり

一つの面(特につやのない面)に照明を当てると、照明の強さが一定でも、面の向きによって見かけの明るさは変わる。その面が照明方向を向いているほど明るく照らされ、面の向きが照明の方向を向いているほど明るく照らされ、面の向きが照明の方向を離れるほど、明るさは弱くなる。また、普通の環境では、屋外なら太陽によって上から照らされ、室内なら天井の電灯によってやはり上から照らされることが多い。





→物理的性質(客観的事実)その 1

　　つやのない面は照明方向を向くほど明るく見える

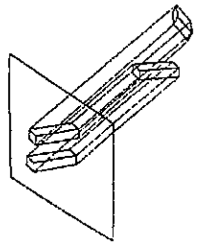
　手がかり(人の推測)その 1

　　明るい面ほど上を向いているだろう

この物理的性質と手がかりの差により写真のような凹凸逆転の錯覚が起きる。(右図参照)

・平行線の手がかり

三次元の世界で互いに平行な線は、画像へ投影しても平行である。一方、稀だが写真のように三次元世界で平行でない線が画像へ投影した時にたまたま平行になることもある。それが起こるのは特殊な視点位置をとった時のみである。(右図参照)



→物理的性質その２

三次元空間で互いに平行な線は、画像へ投影しても互いに平行である

手がかりその２

画像中で互いに平行な線は、もとの三次元世界でも平行である

この手がかりは、偶然に起こる可能性の少ないことは無視して構わないだろうという考え方に基づいている。しかし、偶然には起こりにくいことでも、故意に起こすことはできる。そしてそれによって人の視覚を欺くことができる。

単眼立体視は、立体とその画像の関係についての経験則のかたまりである。よってこれは、人が生まれてから生活の中で立体を見たり触ったりして次第に蓄積してきた知識の上に成り立つものである。だから生活経験の乏しい赤ちゃんにはだまし絵の錯覚は起こらないだろうと予測される。

Ⅱ. 線画の理解

次の５つを前提として絵を理解する方法を考える。

前提 1:対象物体は不透明な材質でできた厚みのある多面体である。

したがって、物体の表面に曲面部分はない。また、それぞれの面は多角形または多角形の穴のあいた多角形で、折り紙細工のように厚みのない物体も考えない。

前提 2:対象物体を眺める視点は、一般の位置にある。

すなわち、対象物体の表面を構成する１つの面の延長上に視点がくることはない。また、対象物体の離れている頂点や稜線が偶然に重なって見えるような位置に視点を置くことも無い。だから、視点位置をわずかに動かしたとき、絵の構造が大きく変わることはない。

前提 3:絵には対象物体の見えている稜線のみを描く

したがって、物体が影を落としていても、影の線は描かない。物体表面に模様や傷があってもかかない。また、裏側に隠れている稜線をせんでかくなどもしない。

前提 4:対象物体のそれぞれの頂点にはちょうど３枚の面が接続している

たとえば四角錐は４つの側面が接続するので前提４に反する。よって四角錐は対象としない。

前提 5:対象物体はそれを描いた絵の画面からはみ出さない

つまり、対象物体全体像が描かれていると仮定するということである。

以上の５つの前提で描かれた絵は線だけで描かれたものなので線画と呼ばれる。

線画に描かれている立体を理解する仕方の一例は、線画の中の線を対応する稜線の３次元空間での形と姿勢にしたがって、分類する方法である。そのために物体の稜線を２つに分類する。１つは両側の面が山の尾根のように突き出して接続している線で、これを凸稜線とよぶ。もう１つは両側の面が逆に谷の底のように引っ込んで接続している面でこれを凹稜線とよぶ。次に、それらの稜線を表現した線画の中の線を次のように３種類に分類して

印をつけることにする。

1、両側の面がともに見えている凸稜線の像を凸線とよび+のしるしをつけてあらわす

2、片側の面だけが見えていて、もう一方の面は裏側へ回りこんで見えなくなっている凸稜線の像を輪郭線とよび矢印をつけてあらわす。ただし矢印の向きはその稜線に接続している面が右側にくるように定める。

3、凹稜線の像を凹線と呼び、−のしるしをつけてあらわす。

凸稜線に対しては、両側の面が共に見える部分と一方だけが見える場合の二つが区別されるが、凹稜線にそのような区別はない。なぜなら、凹稜線は両側の面がともに見える場合だけ画面のなかにかかれるからである。

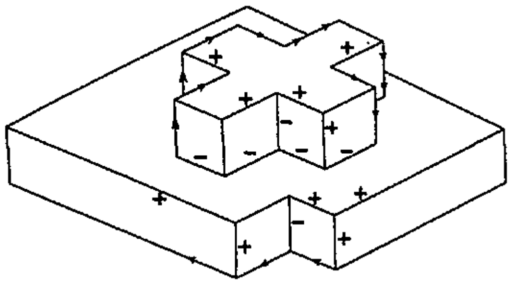


図 1:線画の線を分類した結果をあらわす図

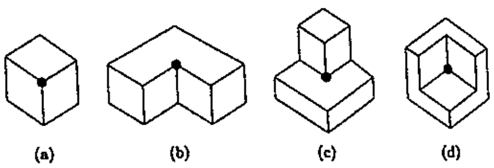
このように線画の中の線を 3 種類に分類して印を付けることにすると正しい線画に正しく印をつけた時に満たされるべきルールを列挙することができる。

ルール 1:それぞれの線にはただ一つの印がつき、一つの線の印が途中から変わったりすることはない。

これは、3 次元における稜線が凸稜線と凹稜線の 2 つしかなく、それらに接続する面は全て平面なので、外向き砲線が視点の方向を向いているか否かが、稜線をたどったとき途中で変わることは無いからである。

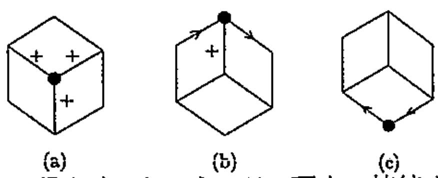
第 2 のルールは、線の印の組み合わせに関するものである。多面体において 3 枚以上の面が接続する点を頂点とよび、前提 4 よりどの頂点もちょうど 3 枚の面に接続している。したがって、稜線に接続する稜線もちょうど 3 本である。これら 3 本の稜線が凸稜線か凹稜線かによって頂点は下の図 2 のように 4 種類に分類できる。すなわち、凸稜線の数が 3 の場合(a)、2 の場合(b)、1 の場合(c)、0 の場合(d)である。

図 2



次に、これらの頂点を、一般の視点から眺めたときの見え方を列挙する。そのためには、頂点に接続する面を延長して、周りの空間を分解し、それぞれの任意の点に目を置けば目的が達成される。見え方が本質的に異なるものを列挙すると、下の図 3 の(a)、(b)、(c)の 3 通りがある。

図 3



ただし、「本質的に異なる見え方」というのは、頂点に接続する面の延長上を視点が通過したときの見え方の違いをさす。

他の頂点に関しても同様の手順で見え方を列挙できる。その結果にしるしをつけ、ことなるしるしの組み合わせを列挙すると、図 4 に示す 12 通りしかないことがわかる。これら 12 種類の組み合わせは図 1 の線画の中に現れている。

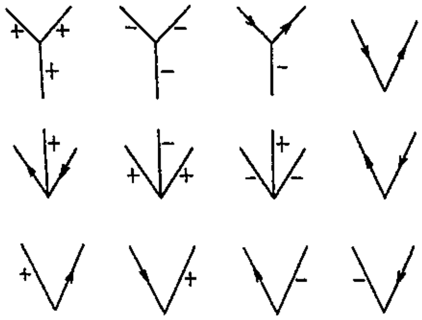


図 4

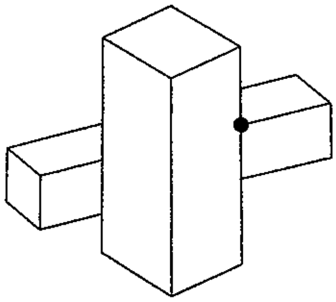


図 5

線画の中で、2 本以上の線が接続する点を接続点とよぶ。頂点の像は全て接続点である。しかし、頂点に対応しない接続点も図 5 に示すようにある。それは、物体の 1 部が他の部分を隠すところで現れる。
そこでしるしの組み合わせを列挙すると図 6 の 4 通りとなる。

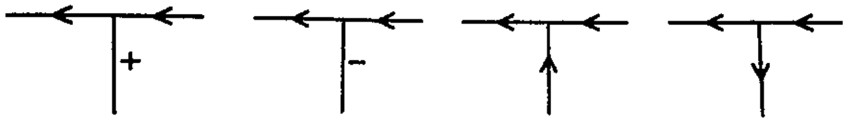


図 6

このような接続点では、2 本の線が同一直線上に並び、そこにもう 1 本の線が接続して、アルファベットの T のような形をなす。このうち、同一直線上に並ぶ 2 本は、他を隠す線なので輪郭線のしるしである矢印がつく。もうひとつの線は、もっと奥にある別の立体の稜線なので、そのしるしは全てありえる。その結果図 6 の 4 通りの組み合わせが現れる。
以上より次のルールが得られる。

ルール 2: しるしの組み合わせはすべての接続点において、図 4 と 6 に列挙した組み合わせのいずれかでなければならない。

線画が与えられたとき、ルール 1、2 を満たす印の組み合わせを、探すことで描かれている立体を解釈する手がかりが得られる。その例が図 7 である。

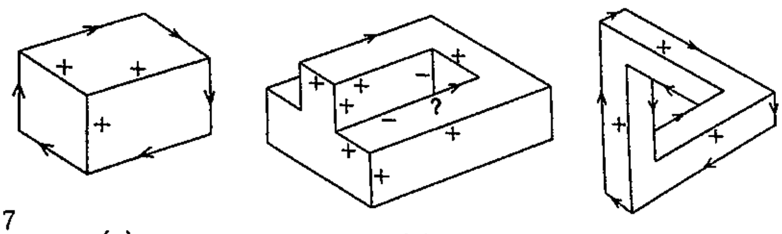


図 7
(a) (b) (c)

ず、前提5より、もっとも外側を囲む線は輪郭線でなければならないので、時計回りの矢印がつく。すると、残りの3本の線はルール2より凸線に限られる。だからこの図の印がこの絵を人が見たとき、もっとも自然に思い浮かべる解釈と一致するだろう。

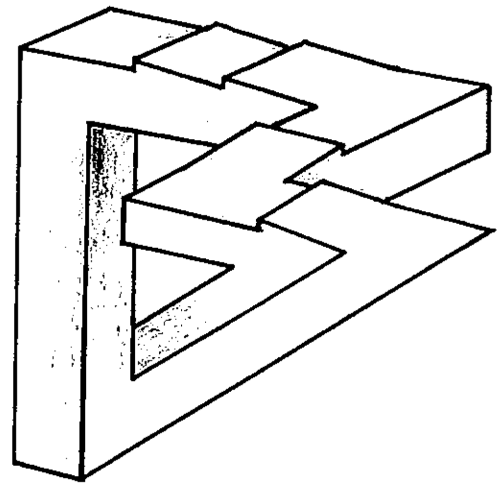
(b)の線画ではもっとも外側を囲む線に輪郭線の印をつけ、そこから出発してルール 2 に反しない印の組み合わせを考えると存在しない。よってこの線画を投影図にもつ立体は存在しない。

一方(c)の線画はペンローズの三角形とよばれるだまし絵だが、図に示すようにルール 2 に反する印がついてしまう。したがってこの場合は、ルール2を使って探すと誤った解釈が得られてしまうことがわかる。この例からわかるようにルール2は万能ではない。

しかしこれは、当然であり、ルール 1、2 をみたす印をもつことは線画が正しく立体を表すための必要条件であるが、十分条件ではない。だから、印がつかなければその線画は間違っていると判定できるが、印がついたときは、あくまでも立体としての解釈の候補が得られただけであり、それが正しい解釈か否かはさらに調べなければならない。

3 結果・考察

ここまでの解説で、芸術家エッシャーのようなだまし絵も、私たちでも理解できるような説明がつくということが分かった(実はよく分からなかったとか言えない)。ではその結果として、ここで実際に今までの説明を利用し自分で図形を描いてみようと思う。



P4 の図 b を組み合わせることで右側を造形し、全体と一部には、図 c を用いた。また、錯覚を狙った影のつけ方を工夫しようとしてみたけどこれはもう普通に高度でした、ていうか階段いらなかったですねごめんなさい。ちなみにエッシャーの絵でこの図式を活用しているものを参考までにのせておこうと思う。

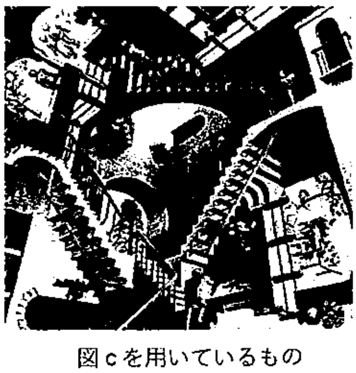


図 c を用いているもの

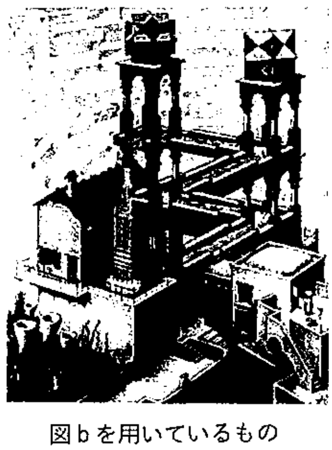


図 b を用いているもの

4 結論

数学を極めたところで(極めてないけど、)私たちは芸術家にはなれない(知ってた)。

5 参考文献

だまし絵のトリック 不可能物体を可能にする(杉原厚吉著)

エッシャー・マジック だまし絵の世界を数理で読み解く(杉原厚吉著)

《ビュフォンの針実験》－8000回行ってみた－

発表者　106　27　小林きら璃

○抄録

ビュフォンの針実験を自身で試し、どこまで正確な円周率を導くことができるかを確かめた。
また、三角比や積分の知識を使って、何故円周率を導くことができるのかを調べた。
さらに、確率の意義について持論を展開した。

①研究の背景と目的

今回数学の自由研究を行うにあたり、せっかくこのような機会を得たのに、ただインターネットから引用し情報をまとめるだけでは勿体無いと感じた。そこで、自身で実際に実験を行えるものがないかと探した所、今回のビュフォンの針実験に行き着いた。無機質な、直線でしかない実験道具から、なぜ円周率が導かれるのか、その理屈を理解したいと強く思った。

②実験方法

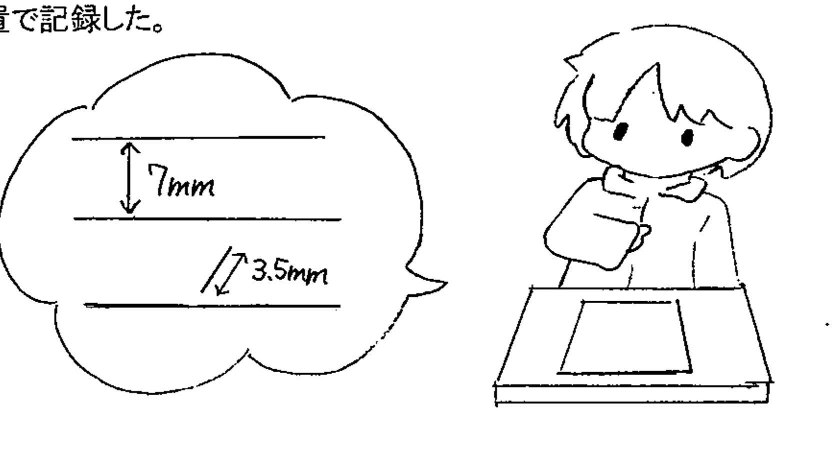
○用意するもの

・A罫線（幅 7mm）の大学ノート
・シャープペンシルの芯

○実験の手順

Ⅰ. シャープペンシルの芯を、3.5mm（ノートの平行線の間隔の半分）の長さにする。
Ⅱ. 3.5mmのシャープペンシルの芯をノートの上に落とす。
Ⅲ. 芯が罫線に重なったか、重ならなかったかを記録する。
Ⅳ. Ⅱ、Ⅲの作業を任意の回数繰り返す。
Ⅴ. 最後に、芯を投げた回数を芯が罫線に重なった回数で割る。
（割り切れなかった場合、小数点第5位以下は切り捨てとした）

※今回、芯を放す位置は固定しなかった。また、芯がノートに落ちた後転がった場合、最終的に芯が静止した位置で記録した。



問題は芯を何回落とすかである。ここで下の表を見てもらいたい。

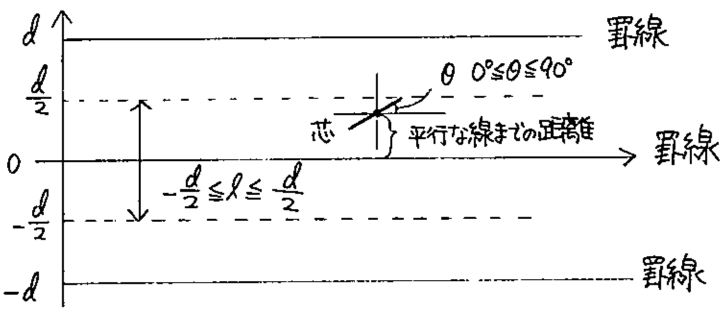
ランキング	名前	年	実験回数	導いた円周率
1	ウルフ	1800 年代	5000	3.1596
2	ラッツァリーニ	1901	3408	3.1415929
3	ダベルディーン	1855	3204	3.11553
4	レイナ	1925	2520	3.1795
5	フォックス大尉	1864	1030	3.1595

これは、今までででビュフォンの針実験を行った暇人...否、偉人のなかで、その回数が多かった人TOP5を記載したものだ。ナンバー1は 5000 回である。
これは．．．超えるしかないだろう！？
お世辞にも数学が得意とはいえない私が輝けるのはここしかない！...とは言い過ぎかもしれないが、せっかくの日曜日に家にとじこもってやるのだ、極めてやる！！！

ということで、今回私はこのビュフォンの針実験を、8000 回行った。
8月4日（日）の15時30分から8月5日（月）の0時4分、8時間34分かかった。
無心で芯を落とし続ける時間...狂ってる...
まったく高校1年生にふさわしい素敵な青春夏休みである！！

③何故円周率が導かれるのか

まず、針が平行線に対して落ちる“パターン”を考える。
平行線に対する針の状態は、次の2つで決定できる。
・平行線と針の中心の距離
・平行線と針の角度



θ は0度から90度の間の値をとる。
平行線と針の中心の距離は、一番近い一本の平行線との距離を考えればよいので、とりうる値は

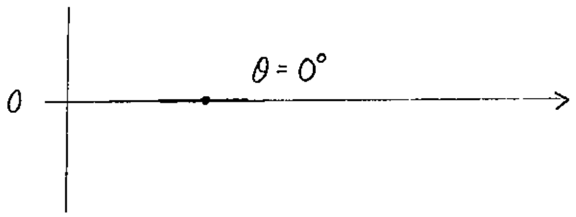
−d/2からd/2となる。

平行線と針の角度： $0° \leqq \theta \leqq 90°$

平行線と針の中心の距離： $-\frac{d}{2} \leqq \ell \leqq \frac{d}{2}$

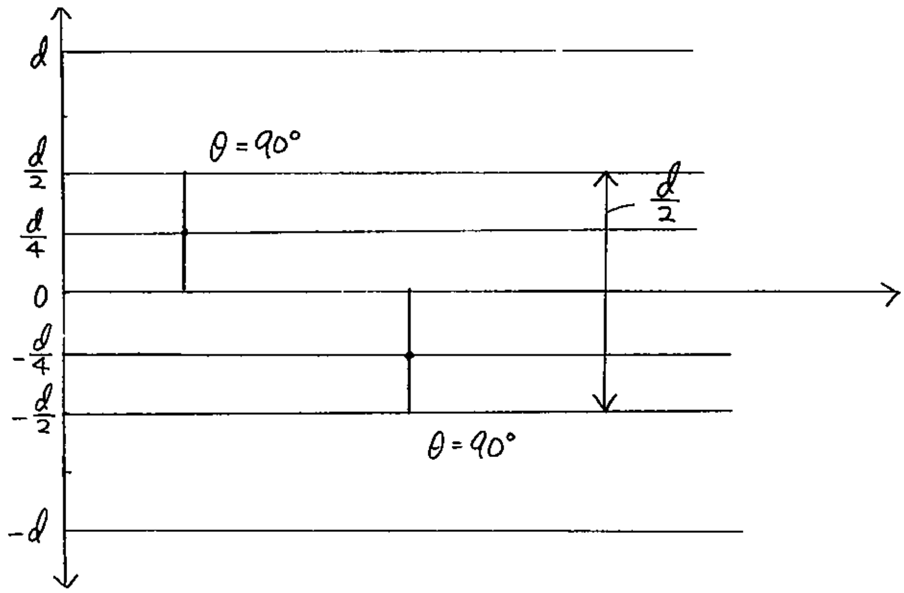
針の角度を固定して考える。

針の角度が平行線に平行だった場合（θ=0度）、線と針の間の距離は0である。

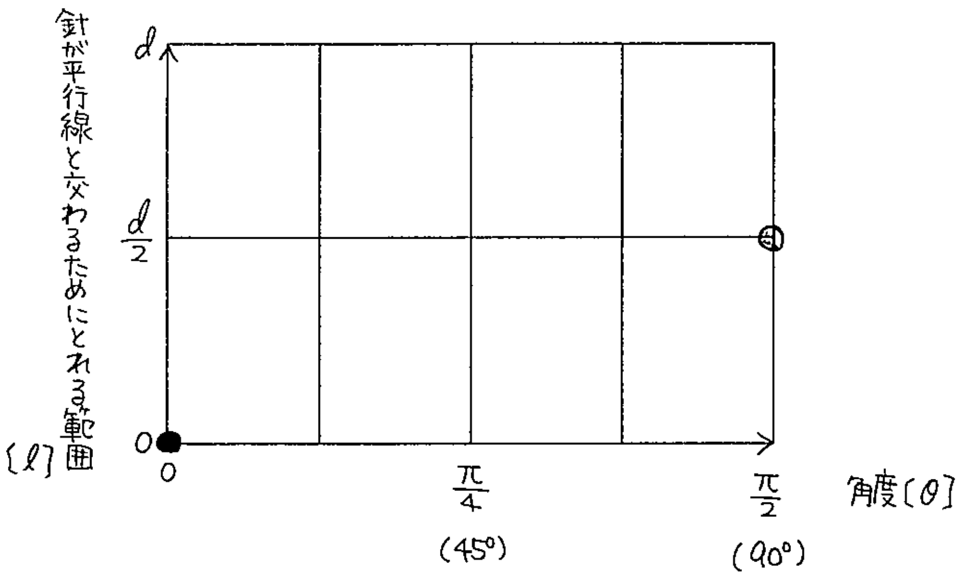


針の角度が線に垂直な場合（θ=90度=π/2 ※ラジアン表記）、針の中心が-d/4から d/4の間にあるとき交わる。

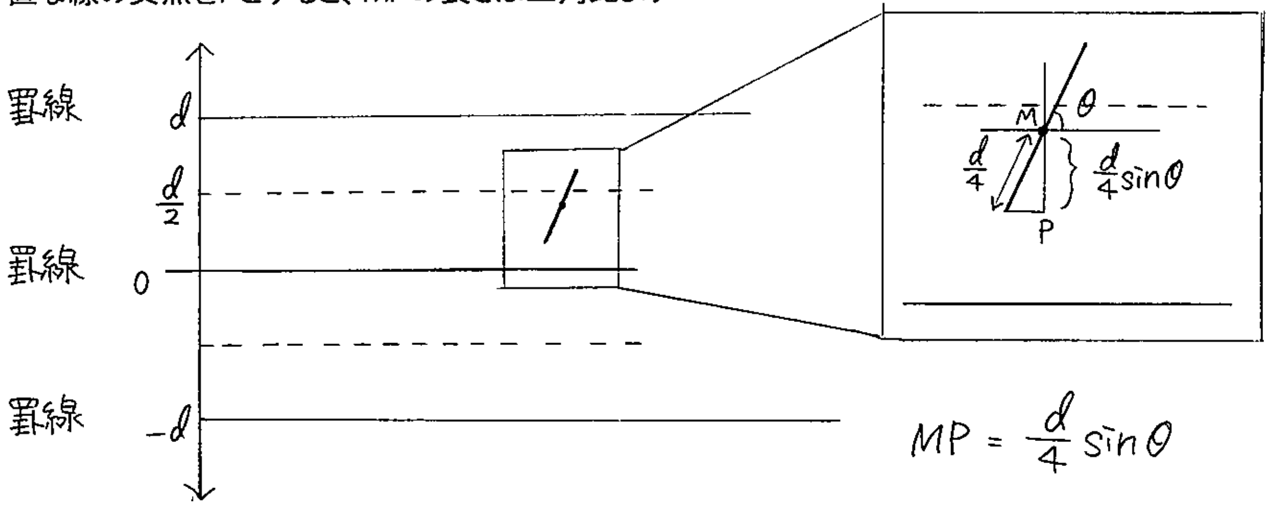
また、この範囲の長さはd/2である。



ここまでを横軸に針の角度（θ）縦軸に針が平行線と交わるためにとれる範囲（l）としてグラフに描く。

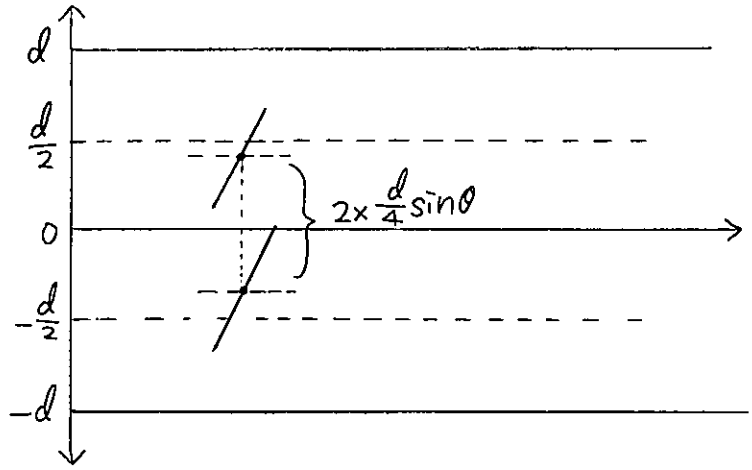


θがOからπ/2にあるときはどうなるか。
角度がθの場合を考える。
針の中心をM、針の平行線に近い方の端を通る平行線に平行な線と、針の中心を通る平行線に垂直な線の交点をPとすると、MPの長さは三角比より



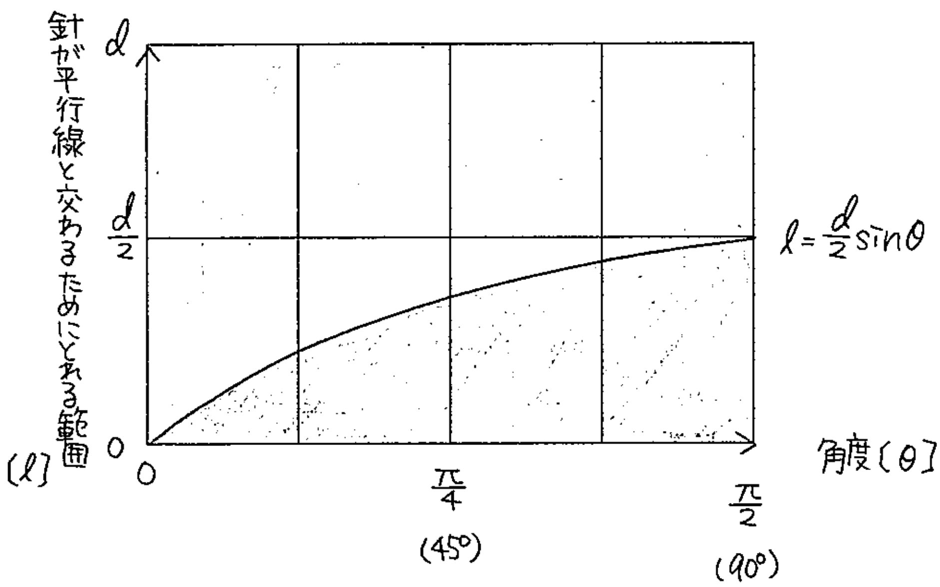
$$MP = \frac{d}{4}\sin\theta$$

となる。したがって針が平行線と交わるための範囲は、下図のように平行線の上下に位置できることを考えると、



$$\begin{aligned} l &= m\times 2 \\ &= \frac{d}{4}\sin\theta\times 2 \\ &= \frac{d}{2}\sin\theta \end{aligned}$$

これでlとθの関係が分かったため、先ほどのグラフに書き込むと、



針の状態が赤い領域に入ったときには線と交わるが、青い領域に入ったときには線と交わらない。
ここで赤い領域の範囲(線と交わるとき)の面積を求めてみる。ここで積分の知識を使う…

$$
\begin{aligned}
\text{赤い領域の面積} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{2}\sin\theta\, d\theta \\
&= \frac{d}{2}(-\cos 90^\circ + C) - \frac{d}{2}(-\cos 0^\circ + C) \\
&= \frac{d}{2}(0 + C) - \frac{d}{2}(-1 + C) \\
&= 0 + \frac{d}{2}C + \frac{d}{2} - \frac{d}{2}C \\
&= \frac{d}{2}
\end{aligned}
$$

一方、長方形の面積(赤＋青)は、

$$
\begin{aligned}
\text{長方形の面積} &= \frac{\pi}{2} \times d \\
&= \frac{\pi}{2} d
\end{aligned}
$$

よって

$$
\frac{\text{長方形の面積}}{\text{赤い領域の面積}} = \frac{\frac{\pi d}{2}}{\frac{d}{2}} = \pi
$$

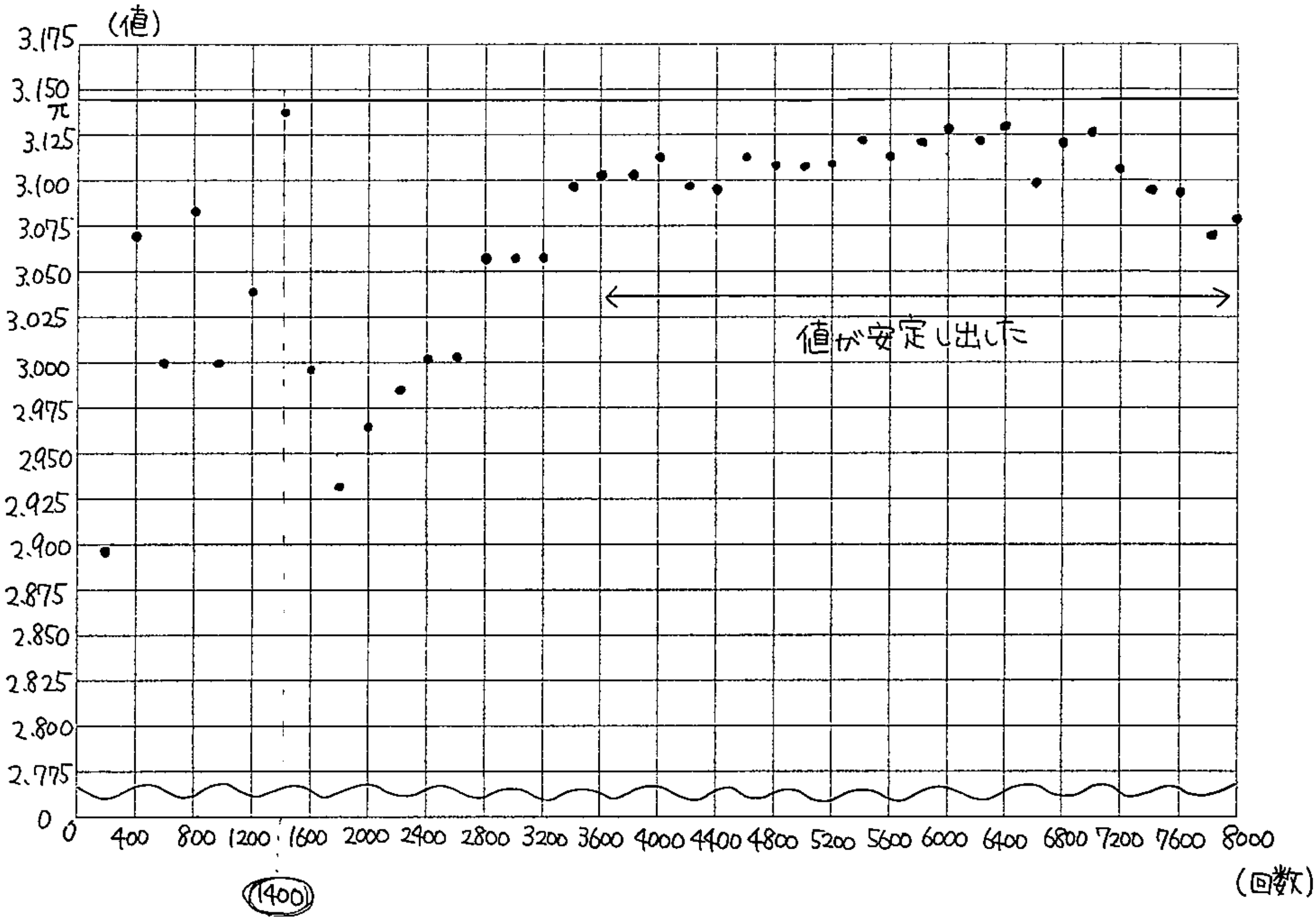
したがって、針を投げ続けると、

$$
\frac{\text{針を投げた回数}}{\text{針が線に触れた回数}} = \pi
$$

となっていく。
平行線と針のような直線的なものから円周率という円に関係した定数が導けるのは、“針の回転角”が関係していたから、ということになる。

③実験結果

今回 8000 回行うなかで、回数を重ねるごとに、導きだされる値がどのように変化していくのかも気になった。そこで、区切りのいい数字での結果とあわせてグラフ形式で実験結果を記載する。



という結果になった。もっとも円周率に近い値を導くことができたのは

1400回行った時の、3．1309

という結果になった。

④考察

今回、私は実験を行う前、「回数を重ねれば重ねるほど値は円周率に近づく」と思っていた。

しかし、実際はそんな単純な話ではなかった。8000回行って導いた値より、僅か1400回で導いた値の方がずっと円周率に近いという結果になったのだ。何故このような結果になったのか、考えうる原因を並べてみた。

- ・回数の数え間違い
- ・芯の落下地点の見間違い
- ・芯がぴったり 3.5mmではなかった

・実験を行った部屋に風があり実験に影響を与えた

・使用したノートに折り目などがあった

・そもそも回数を重ねればいいという問題ではなかった

最後以外は実験方法の問題であり、数学の問題ではないと思う。精密な実験を行えば改善されることだ。私が気になるのは最後の項目、「そもそも回数を重ねればいいという問題ではなかった」である。今回の実験とはあまり関係していないし、なんだか少し確率論に喧嘩を売っているような気もする。今回の結果を見て普通は「回数を重ねることで値は安定した」「実験は成功した」ととらえるだろう。しかしせっかくなので、少し話題はそれるが、この実験をある意味「失敗」ととらえ、確率の意義について持論を展開したい。ここからは、確率論をきちんと理解していない、無知な一生徒の、どこまでも失礼な主張になる。

。

コインを投げたとき、表が出るか裏がでるかは確率でいうと二分の一ずつ。

これを、実際に実験して確かめたとする。

一回目、表がでた。ここで数学者は実験を終了し、「コインを投げたとき、必ず表が出る」という論文を発表した。いやいや、これはおかしい。もっと回数を増やせ。といわれた数学者は論文をとりさげ、もう一度コインの実験を行った。こんどはなんと、10000回！しかし、結果はすべて表。数学者はもう一度「コインを投げたとき、必ず表が出る」という論文をあげた。

という話があったとする。もちろんこれは極端な話で、10000回すべて表がでるとは考えにくい。

…が、その確率は0ではないだろう。気が狂ったこの数学者が、無限回コインをなげたら、その時無限回表が出る確率は、0だろうか？いや、限りなく確率は低いが、0じゃない。

同じように、私が行ったビュフォンの実験も、8000回すべて芯が罫線にかかることもあり得た訳だ。

回りくどくなってしまったが、簡単にいうと、私個人は因果的決定論信者なのである。

まったく8000回実験した奴が何を言っているんだという話だが、確率の全てを否定したい訳ではもちろんない。ただ確率はあくまで確率に過ぎず、常に結果とは相容れないものであろう。多元宇宙論やニーチェの永劫回帰を信じるのならば、いったいどこまで確率に意味があるのか。答えが1つになる、絶対的な数学という分野で、確率だけ随分と曖昧なように感じる。

確率とは「全て未来は決まっている」ことを恐れた数学者達の机上の空論に過ぎないのではないか。

「神はサイコロを振らない」と、かのアインシュタインは言った。彼がこの発言をしたのは量子力学に対してだが、そのまま確率論に応用できる発言だと私は思う。

と、ここまで夜道に気をつけないと数多の数学者達に命を狙われそうなことを書いている。

もちろん、確率は現代社会にも広く利用され、その利便性は素晴らしいものだ。

回数を重ねれば重ねるほど、値は安定するだろう。しかし、行う実験によって、安定の仕方は変わる。

今回の実験結果では、3000回を越えたあたりから急に安定しだした。

安定とは何か？どこからを安定とするのか？安定は必ず起こるのか？安定のトリガーは何か？

いつか、今回「安定」について新たに抱いた上記のような疑問の答えを調べてみたい。

長い歴史の中で、ここまで数学が発展したのは、その利便性、現実世界への応用力があったから

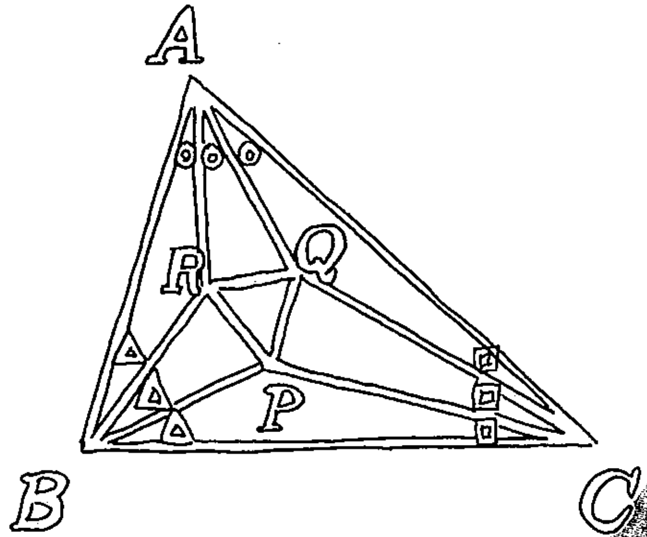
だ。しかし、本当にその全てを妄信していいだろうか。数字に囲まれる現代社会で、数字しか見つめていない、なんてことはないか。計算で弾き出したコインの確率は、一つ机から離れてみれば大して意味を成さないだろう。実際に何度も投げて弾き出したコインの確率は、机上でふんぞり返る数字の前で大して意味を成さないだろう。私は数学の世界にとんと無知だが、彼らもまた、私達の生きる世界にずっと疎い。たまには彼らの鉄仮面を剥ぎ、不躾に真っ向から、無知なりに異議を唱えるのもアリなのでは、と思う。

⑤参考文献

・ビュフォンの針実験-針を投げるだけで円周率が求まる
https://analytics-notty.tech/buffon-needle-experiment/
・ビュフォンの針の問題と確率の導出 | 高校数学の美しい物語
https://mathtrain.jp/buffon
・積分のやり方と基礎公式。不定積分と定積分の違いとは？
https://atarimae.biz/archives/22555
・三角関数の不定積分
https://www.geisya.or.jp/~mwm48961/koukou/integral_sin1.htm
・やっぱり神はサイコロを振らない？ | 日経サイエンス
www.nikkei-science.com/page/magazine/0412/sp_07.html
・決定論-Wikipedia
https://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%B1%BA%E5%AE%9A%E8%AB%96
・確率論-Wikipedia
https://ja.wikipedia.org/wiki/%E7%A2%BA%E7%8E%87%E8%AB%96

モーリーの定理

Morley's Trisector Theorem



どんな三角形でも中に正三角形が眠っている！？

1年6組28番　齋藤渚

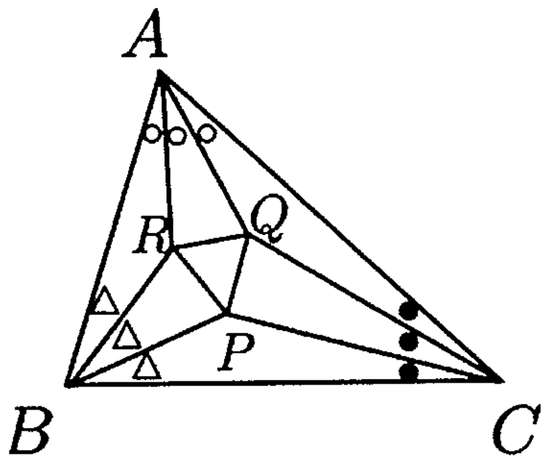
目次

1、はじめに

「数学」という言葉を辞書で引いてみた。そうすると、「主に数量及び空間の性質を研究する学問」と記されていた。また「空間」という言葉を辞書で引くと、「あらゆる方向への無限の広がり」や「全方向に限りなく広がる世界」と記されていた。故に、そのようなことを研究する「数学」という学問も限りなく広がっていくものなのであろう。

私がこの研究で調べ上げた「モーリーの定理」はそんな「数学」のほんの一部分にも満たない。この定理だけでも現在明らかになっている証明方法は数え切れないほどある上、これからも発見され増え続けるだろう。そんなたくさんある中、ここでは私がとてもシンプルかつわかりやすいと思った証明方法を紹介する。

2、まずモーリーの定理って？



◁ Frank Morley

モーリーの定理（Morley's Trisector Theorem）とは、「三角形のそれぞれの内角の三等分線の交点のうち、辺に近い三点を結んでできる三角形は必ず正三角形である」という定理だ。実用性はないが、どんな三角形にも当てはまるこの定理は数学界で最も美しい定理の一つといっても過言ではないだろう。

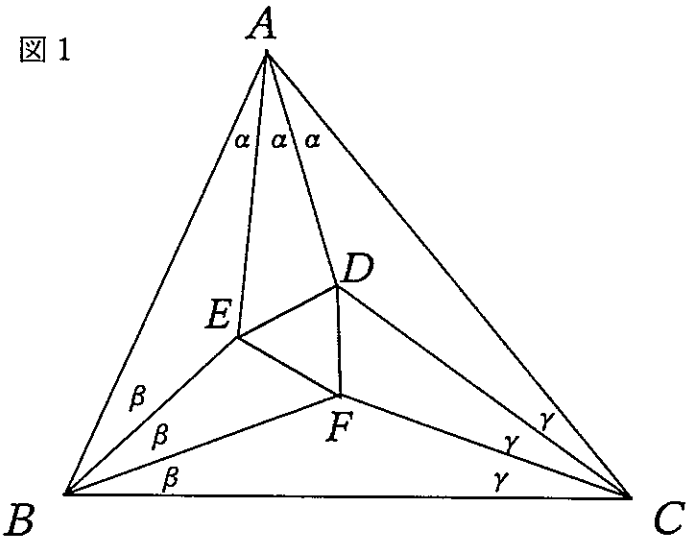
モーリーの定理の証明は三角関数、解析幾何、初等幾何などを用いて証明できるが、今回は初等幾何を用いて高校一年生夏までに習った知識で証明していく。

3、モーリーの定理の証明

まず、証明の方法について説明する。
この定理では角の三等分（参考：角の三等分問題）が現れるため、角の三等分をするとこうこうこうなって・・・と初等幾何だけで元の三角形から証明するのは難しい。ここで、数Ａで登場したチェバの定理の逆やメネラウスの定理の逆と同じように「同一法」を用いて証明する。つまり、正三角形から定理の形に持っていくのだ。

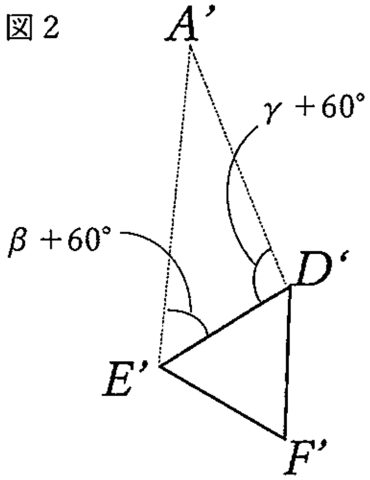
【証明】

図１



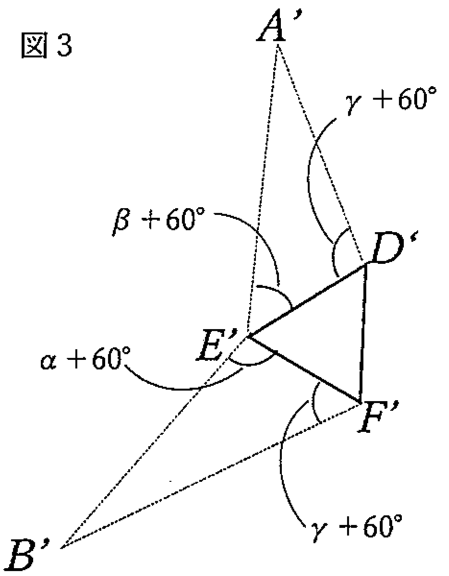
$\triangle ABC$について
$3\alpha+3\beta+3\gamma=180°$
$\alpha+\beta+\gamma=60°$
α、β、γはいずれも０より大きいことを前提とする。

図２



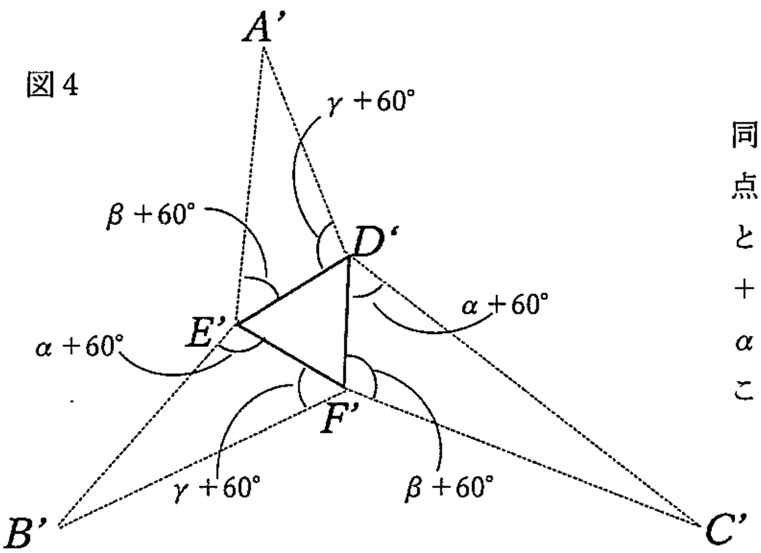
はじめに正三角形 $D'E'F'$を作図する。
点 D'から図２で示した角が$\gamma+60°$ になるような直線を引く。
また、点 E'から図２で示した角が$\beta+60°$ になるような直線を引く。
$\gamma+60° + \beta+60° = \gamma+\beta+120°$
$\alpha+\beta+\gamma=60°$ なので$\gamma+\beta+120° <180°$
よって二つの直線は交わる。その交点を A'とする。

図3



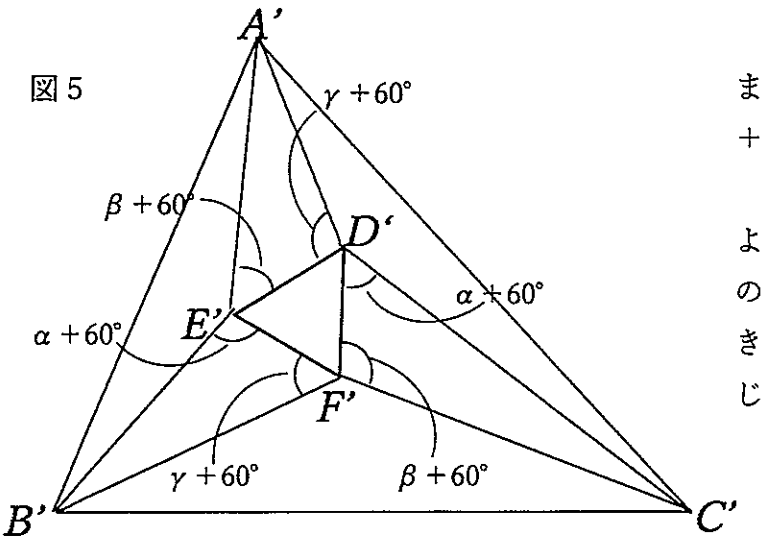
次も同様に、
点 E'から図3で示した角が$\alpha+60°$になるような直線を引く。
また、点 F'から図3で示した角が$\gamma+60°$となるような直線を引く。
先ほどと同様に、
$\alpha+\gamma+120° < 180°$
この二つの直線の交点を B'とする。

図4



同様に、
点 F'から図4で示した角が$\beta+60°$となるように線を引き、点 D'から$\alpha+60°$となるような線を引く。
$\alpha+\beta+120° < 180°$
この二つの直線の交点を C'とする。

図5



また、$\angle A'E'B'=360°-(\alpha+60°+\beta+60°+60°)$
$=180°-\alpha-\beta$
よって$\angle A'E'B'<180°$なので、三つの点 A'、E'、B'を結ぶと三角形ができる。$\angle B'F'C'$、$\angle A'D'C'$、でも同じことが言える。

図6

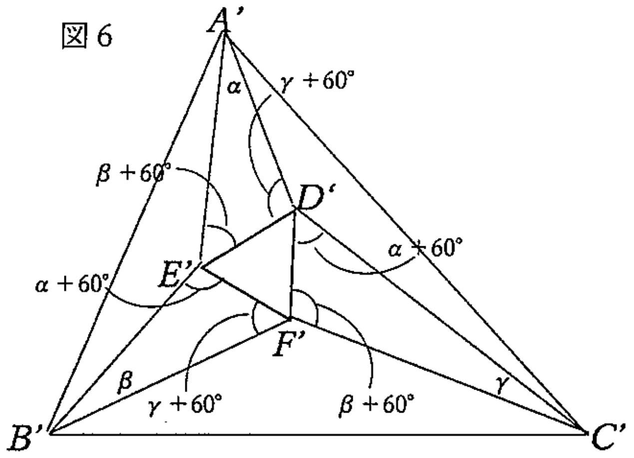


図7

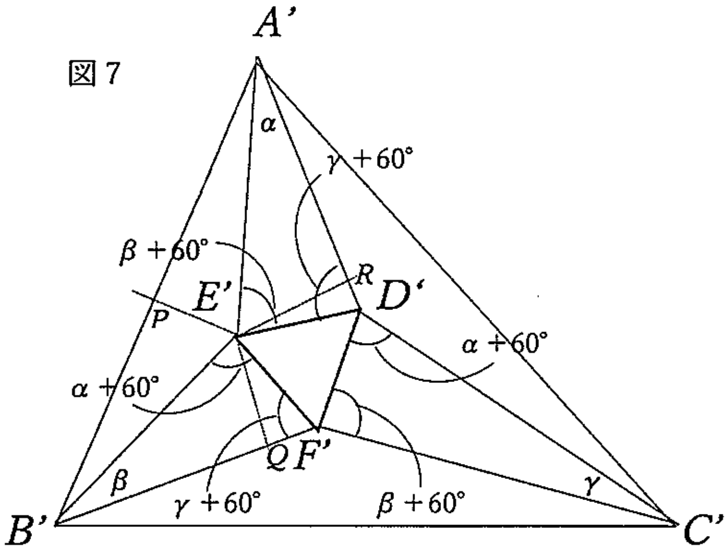
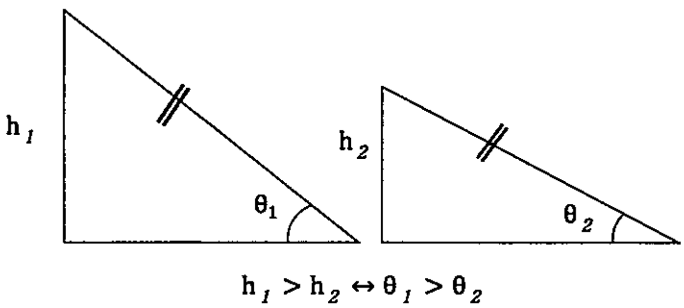


図8



さらに、$\angle E'A'D' = 180° - (\beta + 60° + \gamma + 60°)$

$= 60° - \beta - \gamma$

$\alpha + \beta + \gamma = 60°$ なので、

$60° - \beta - \gamma = \alpha$

よって$\angle E'A'D' = \alpha$

$\angle E'B'F'$、$\angle D'C'F'$も同様に、β、γとなる。

次に、図7のように点E'から$A'B'$、$B'F'$、$A'D'$に垂線を下ろす。各交点をP、Q、Rとする。

$\triangle E'D'R$と$\triangle E'F'Q$について、

$\angle E'RD' = \angle E'QF'$（$=90°$）…①

$E'D' = E'F'$（同じ正三角形の辺）…②

$\angle E'D'R = \angle E'F'Q$（$\gamma + 60°$）…③

①、②、③より、

直角三角形の斜辺と一つの鋭角がそれぞれ等しいので、$\triangle E'D'R \equiv \triangle E'F'Q$

$E'R$と$E'Q$をx、$E'P$をyとおく。

$x < y$と仮定し、

$\angle PA'E'$をℓ、$\angle PB'E'$をmとおくと、

図8より、$\alpha < \ell$、$\beta < m$となる。

$\angle A'E'B' = 180° - \alpha - \beta$

$= 120° + \gamma$

$\ell + m + \gamma + 120° = 180°$

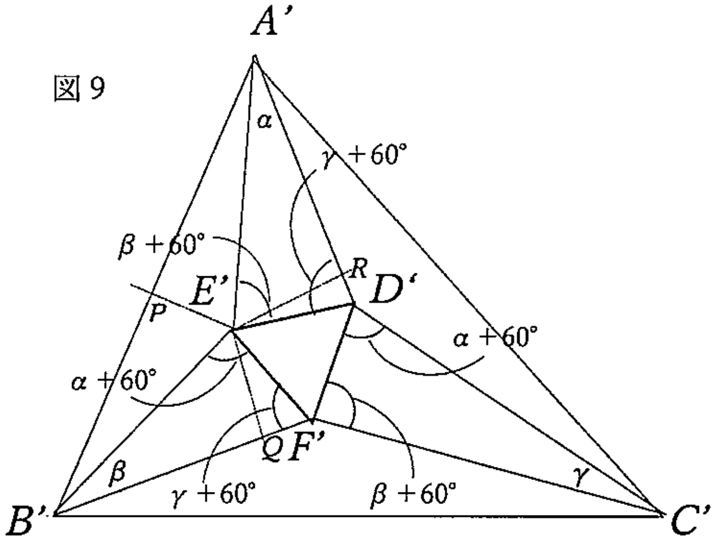
$\ell + m + \gamma = 60°$

しかし前提として、$\alpha + \beta + \gamma = 60°$とした。$\alpha < \ell$、$\beta < m$なので、

$\ell + m + \gamma < \alpha + \beta + \gamma$となるため、

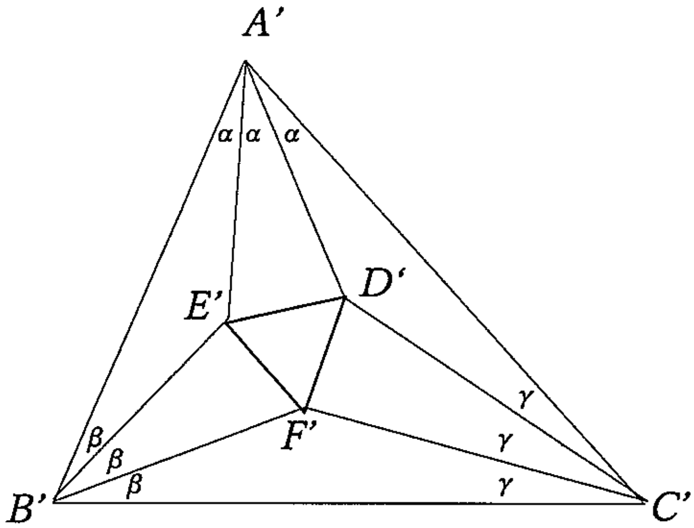
$\ell + m + \gamma = 60°$は成り立たず、矛盾となるので、最初に仮定した$x < y$は間違いである。

図9



次に $x>y$ と仮定すると、先程と同様に
$\ell+m+\gamma>\alpha+\beta+\gamma$ となり、
$\ell+m+\gamma=60°$ が矛盾するのでこの仮定もまた間違いである。
つまり、$x=y$ ということがわかるので、
△A'E'P≡△A'E'D'、△B'E'P≡△B'E'~~R'~~
R　Q
よって、
$\angle PA'E'=\alpha$、$\angle PB'E'=\beta$ とわかった。

この過程を点 F'、D' でも繰り返せば
$\angle F'B'C'=\beta$、$\angle F'C'B'=\gamma$、$\angle D'C'A'=\gamma$、$\angle D'A'C'=\alpha$ ということもわかる。



以上のことから、正三角形 $D'E'F'$ は△$A'B'C'$ のそれぞれの内角の三等分線の交点うち最も△$A'B'C'$ の辺に近い三点を結んでできた三角形であることが明らかになった。

これは最初に提示した△ABC の図と一致するので、モーリーの定理は証明された。

〔証明終了〕

4、最後に

今回の研究では、モーリーの定理を証明した。反省点としてはこの証明を理解し紹介するだけになってしまい、自分から新しい手順を見つけだしたりすることができなかったことだ。あと表紙の印さつしんだ。

証明方法はもちろんこれだけではないので、これから学んでいく数学の知識を活かして、モーリーの定理の他の証明方法を調べてみたり、自分で新しい証明方法を発見したりして数学の知識を深めていきたい。

5、参考文献

・http://pdfs.semanticscholar.org/16f7/9fc0e48ee8a83c0fa5f6ffbac89d51892492.pdf

・http://mathtrain.jp/morley

円周率を求めてみた！

清住尚平　花井英介　馬渕貴弘

1. この研究にした理由

何故この研究にしたか。それは単純に気になったからである。円周率の定義は、「円の周長の、直径に対する比率」である。それだけの条件でどうして3.1415...という数字が出てきたのか。それにただただ興味を持ったからである。

2. 研究方法

円周率を求めるために、まず半径 1 の円の円周を求めようと思う。そのために、円に内接する正多角形の外周とに、円に、外接する正多角形の外周を求めて、その外周の間をとれば、円周を求めることができると考えた。それをもとに円周率を求めてみた。

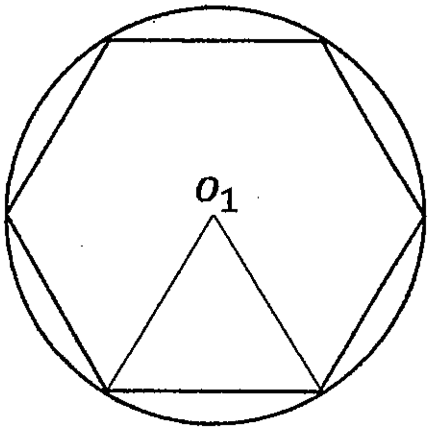
3. 実測

はじめは、簡単そうな正六角形について考えてみる。

i)　内接する正六角形について

半径 1 の円に内接するので一辺の長さは 1
よって外周の長さは6

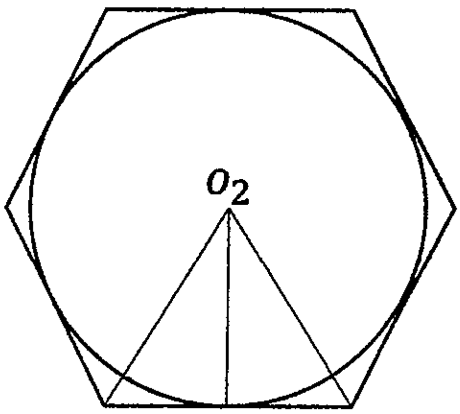
つまり $2\pi > 6$
$\pi > 3$



ii)　外接する正六角形について

半径 1 の円に外接するので一辺の長さは $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
よって外周の長さは $4\sqrt{3}$

つまり $2\pi < 4\sqrt{3}$
$\pi < 2\sqrt{3}$



i) ii) より　$3 < \pi < 2\sqrt{3}$

正六角形について調べると円周率は 3 ～ 3.46 の間にあることが分かった。
次に一般の正n角形について、考えてみる。

図1

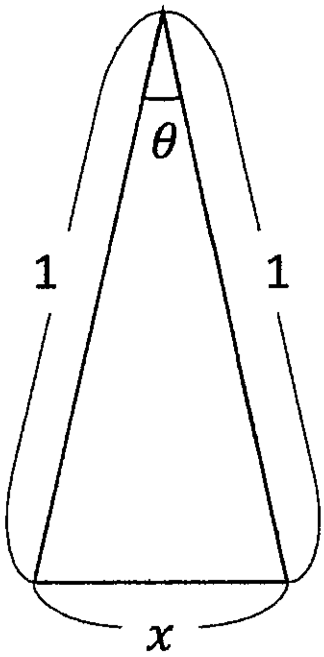
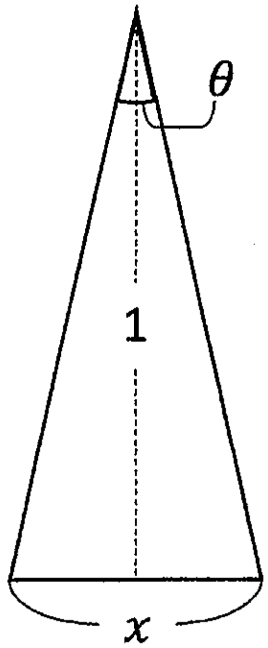


図2



一般の正n角形について、周の長さを l_n

$\theta = \frac{360°}{n}$ とおく

i) 内接する正n角形について (図1参照)

余弦定理より $x^2 = 1 + 1 - 2\cos\theta$

$= 2 - 2\cos\theta$

x>0より $x = \sqrt{2 - 2\cos\theta}$

よって $l_n = n\sqrt{2 - 2\cos\theta}$

したがって $\frac{1}{2}n\sqrt{2 - 2\cos\theta} < \pi$

ii) 外接する正n角形について (図2参照)

$\frac{1}{2}x = \tan\frac{\theta}{2}$

$x = 2\tan\frac{\theta}{2}$

よって $l_n = 2n\tan\frac{\theta}{2}$

したがって $n\tan\frac{\theta}{2} > \pi$

$$\frac{1}{2}n\sqrt{2 - 2\cos\theta} < \pi < n\tan\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{1}{2}n\sqrt{2 - 2\cos\frac{360°}{n}} < \pi < n\tan\frac{180°}{n}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}n\sqrt{1 - \cos\frac{360°}{n}} < \pi < n\tan\frac{180°}{n}$$

半角の公式より $\frac{\sqrt{2}}{2}n\sqrt{\sin^2\frac{180°}{n}} < \pi < n\tan\frac{180°}{n}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}n\sin\frac{180°}{n} < \pi < n\tan\frac{180°}{n}$$

以上から、円周率を求める式ができた。この式に$n = 100$を試しに代入すると、約 3.141 ～ 3.143 という値が出てきた。また、$n = 10000$を代入すると約 3.1415926 ～ 3.1415928という値が出てきた。このnの値を大きくすればより正確になると考えられる。

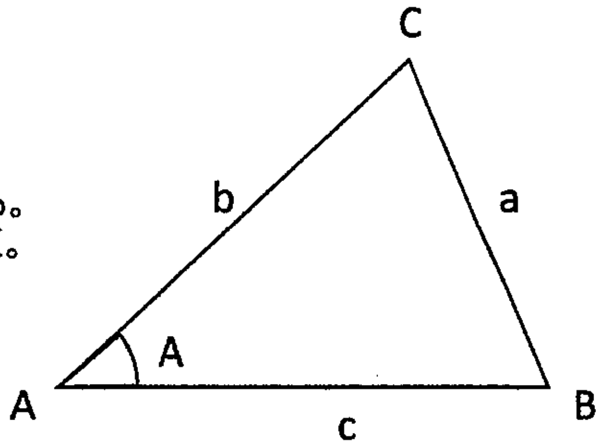
4. 感想

研究をする前は、円周率は謎に包まれていて、それを求めようとすることは結構無謀なことだと、勝手に思っていたが、意外にも簡単に求めることができた。

ただ簡単といっても計算はコンピュータに頼っていたので、実際に人が計算すると、とても面倒なことだと思うので、それを計算した先人たちはすごいなと感じた。

5. 参考

・余弦定理



右の図のように点A , B , Cをとる。
また、AC= b , CB= a とする。
A(0 , 0) , B(c , 0)とすると、Cは$(b\cos A , b\sin A)$となる。
頂点CからX軸へ垂線を下して、その交点をHとおく。
三角形CHBに注目して三平方の定理を用いると、
$a^2 = |c - b\cos A|^2 + (b\sin A)^2$
$= c^2 - 2bc\cdot\cos A + b^2 (\cos^2 A + \sin^2 A)$
すなわち
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A$ となる。

・半角の公式

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$
$\sin^2\theta = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}$

タイトル 2次関数への複素数の応用	1年 7組 22番 名前 渡邉 匡陽

抄録

「$ax^2+bx+c=0$ の判別式Dで，
D<0 の場合 実数解をもたない」
このとき，解は複素数となる。

※ 複素数は $a+bi$ (a, bは実数，iは虚数単位といい，$i=\sqrt{-1}$)
で表わされる数のこと。 aを実部，biを虚部という。

そこで，2次関数のグラフを複数数に拡張しようと思った。

研究内容ー結果

複素数解について考えたいので，D<0 のとき，
つまり $b^2-4ac<0$ のときだが，これでは分かりづらいので，

$ax^2+bx+c=a(x-p)^2+q$ とおき，
$a>0$ かつ $q>0$ または $a<0$ かつ $q<0$ をみればよい。

$a(x-p)^2+q=ax^2-2apx+ap^2+q$ より，xの次数ごとの係数に
注目して，
$$\begin{cases} a=a \\ b=-2ap \\ c=ap^2+q \end{cases}$$

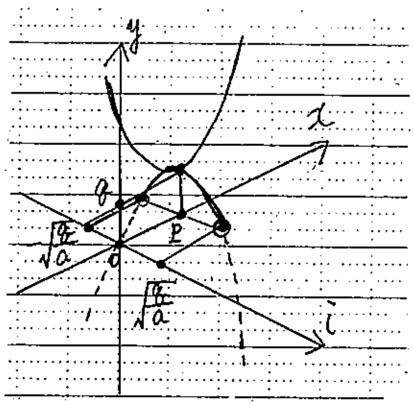
解の公式より，
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{2ap\pm\sqrt{4a^2p^2-4a(ap^2+q)}}{2a}$$
$$=p\pm\frac{\sqrt{4a^2p^2-4a^2p^2-4aq}}{2a}$$
$$=p\pm\frac{\sqrt{-4aq}}{2a}$$

aとqの符合が一致しているので，$-4aq<0$ となる。

よって，
$$p\pm\frac{\sqrt{-4aq}}{2a}=p\pm\frac{\sqrt{4aq}}{2a}i$$

さらに，
$$=p\pm\sqrt{\frac{4aq}{4a^2}}i=p\pm\sqrt{\frac{q}{a}}i$$

複素数　$z=a+bi$　は，独立な a と b で１つの数に
対応するので，　ab 平面（複素数を体系化した数学者の名を取って，
上の点 (a, b) と対応する。　　　　　　　　　　　ガウス平面とも）
このとき，解の複素数　$p\pm\sqrt{\frac{q}{a}}i$　の実部を　x 軸と対応させると，
x軸，y軸，i軸　の３次元で表わすことになる。



— 実数のグラフ（xy平面上）
— 複素数に拡張したグラフ（$x=p$ の平面上）

この２つのグラフは合同で，
（$-ax^2+q=0$ の解は　$x=\pm\sqrt{\frac{q}{a}}$）
それぞれを含む平面は直交する。
（交わる直線が軸）

○の点が，グラフと $y=0$ の交点，
すなわち　$a(x-p)^2+q=0$　の複素数解となる。
ちなみに複素数　$z=a+bi$　に対して　$a-bi$　を，
共役(きょうやく)(共軛)な複素数　と呼び，z に対して $\bar{z}$ と表わす。

なので，　共役な複素数の組　が解
　　という表記もできる。

感想
　複素数解の実部が軸と一致するのはなんとなく
予測できていたけれど，虚部が完全に放物線になるとは
予想していなかったので驚いた。

曲の長さに関する分析

10814　澤井明仁

概要

自分が曲をつくるときの参考にするため、過去50年間のヒット曲(ランキング上位曲)のデータを集め、ヒット曲の長さの傾向を分析した。

研究の背景と目的

僕は、趣味で作詞作曲をする。しかし、こないだ友人に自作曲を聴かせたところ、感想は「長いね」だけだった。ちなみに、その自作曲の長さは5分45秒である。長くたってもっといい曲をかけばもっといい感想がもらえるはずだ、なんてことはわかっているのだが、僕は、5分45秒の曲というのは果たして長いのか、世で聞かれている曲たちや歌われている曲たちはいったいどれくらいの長さなのかということが気になってしまった。というわけで、今後の作詞作曲の参考とするため、いわゆるヒット曲の長さはどれくらいなのかといったことについて数学的に分析してみることにした。

方法

まず、今回の分析に使う資料について説明する。基本資料は、1969年から2018年の50年間の邦楽ＣＤ(シングル)年間売上枚数ランキング３位以内の３作品の表題曲の長さのデータである(＊1)。表題曲が２曲ある場合は２曲ともの長さを資料とすることとし、３曲以上ある場合はその資料は使わず、４位、５位の資料を繰り上げして使うこととする。

また、2010年以降今にいたるまでＣＤの売上枚数がＡＫＢ48による独占状態となっており、これに関しては『このもの凄い販売枚数は、実際には「楽曲が売れた」のではなく、(ＣＤについている)「握手券」や「総選挙投票権」が売れたという側面があることが否定できない。(＊2)』といった指摘がされている。よって、2010年以降のデータについては、邦楽年間ダウンロード数ランキング上位曲の長さを同じ方法で扱うこととする(＊1)。

さらに、一概にヒット曲といっても聞く曲と歌う曲では違う結果が出る可能性もあることも考慮し、参考資料として1992年以降はカラオケで歌われた曲の上位曲の長さも同じ方法で扱うこととする(＊3)。

これらのデータの代表値を出すなどして、ヒット曲の長さは一般的にどのくらいなのか分析していく。

研究内容

<ステップ１　50年分のランキング上位曲の長さの度数分布表をつくる>

曲の長さ(分：秒)	度数	度数(カラオケ)
2：10以上～2：49未満	3	0
2：50　～3：29	22	2
3：30　～4：09	34	18
4：10　～4：49	59	26
4：50　～5：29	24	22
5：30　～6：09	10	9
6：10　～6：49	1	2
6：50　～7：29	0	2
計	153	81

すべての資料のデータを長さで区切って分けて表に示してみた。売上数の方でも、カラオケの方でも、4：10～4：49をピークに長い方にも短い方にも少なくなっていくという状況になっている。特に売上数のほうでは4：10～4：49の曲が全体の約39%を占めていることがわかる。

＜ステップ2　データから各種代表値を求める＞

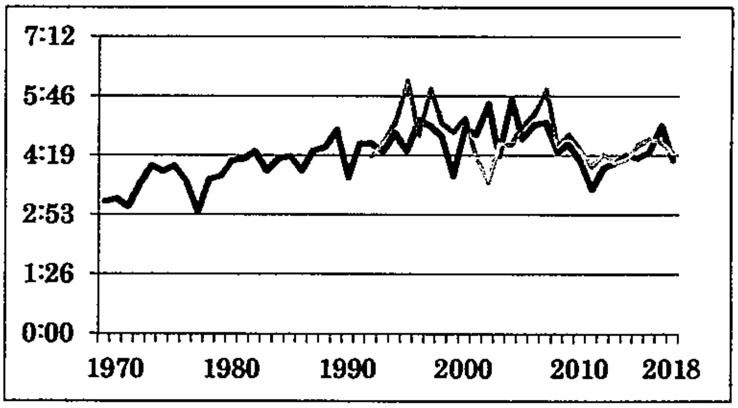
	平均値	1位平均値	中央値	1位中央値	最頻値	
全データ	4:19	4:19	4:22	4:25	4:30	
1969～1978	3:34	3:38	3:21	3:40	3:10	
1979～1988	4:13	4:16	4:12	4:20	3:50	4:30
1989～1998	4:40	4:48	4:38	4:54	4:30	
1999～2008	4:51	4:38	4:49	4:49	4:30	
2009～2018	4:17	4:14	4:19	4:16	4:30	
全データ(カ)	4:46	4:45	4:41	4:37	4:30	
1999～2008(カ)	4:48	4:50	4:45	4:39	4:30	
2009～2018(カ)	4:27	4:20	4:15	4:15	4:30	

次に、データの各種代表値を求め、表にまとめた。1位平均値はランキング1位の曲のデータだけでだした平均値を指し、1位中央値も同じである。最頻値は、ここではデータを＜ステップ1＞のくくりでわけたときに1番多かった階級の階級値を示している。また、(カ)と書いてあるものはカラオケで歌われた曲のデータである。どの数値も、秒数は四捨五入して整数になおしてある。

まず、平均値、1位平均値、中央値、1位中央値では、1969年から1978年以外の数値以外はどれも4分台になっている。また、最頻値でも、1969年から1978年、1979年から1988年の数値以外はどれも4分台になっている。さらに具体的に言えば、どの数値もほぼ4分10秒台から4分50秒ほど(表の色塗り部分)となっているといえる。確認すると、カラオケのデータも同じような結果となっている。

＜ステップ3　曲の長さの変遷を調べる＞

さらに、時代によっても曲の長さに違いがあるかもしれないと考え、各年のデータの平均値をグラフに表してみた。薄い色のほうはカラオケのデータである。



グラフを見ると、最初は短めの曲が多く、その後長くなって、同じくらいのところでいったりきたりしていることがわかる。ステップ2で1969年から1978年、1979年から1988年の数値だけ小さくなったのはこのような傾向によるものであるといえるだろう。

結果・考察・まとめ

ステップ1とステップ2の結果の重なり、またステップ3の追加検証によって、現代の曲の長さとして妥当なのは4分台、特に4分10秒台から4分50秒ほどだということがわかった。

ちなみに、シンガーソングライター・音楽評論家の中将タカノリ氏は、「音楽には一方的に聴かされるだけでなく、自分で歌ったり演奏したりダンスして楽しむという面もあるため、一曲があまりに長すぎると体力的に疲れたり、仲間内で披露する場合にもしらけてしまう恐れがあ」り、また「近世まで東アジアでもヨーロッパでも主流だったのは定型詩であり、サイズはある程度一定になり、そのため一曲の長さもおのずと決まってきて、その長さの感覚が今も受け継がれている」ために曲の長さは3分～5分が主流であるということを指摘している[*4]。そういった面からみても、4分10秒台から4分50秒ほどという長さはちょうどいいといえるのかもしれない。

そして、僕の自作曲の話に戻ると、5分45秒、そうか、「長いね」と言われてもしょうがなかったのかもしれない。今後は、4分10秒台から4分50秒ほどの名曲を生み出していきたい。いや、長さなんかに縛られず名曲を生み出すことの方が誇りだろうか。でも、数学的には4分10秒台から4分50秒ほどの名曲を生み出すのが一番合理的なのである。そんなことより、僕の今の課題は「名曲を生み出す」ことのほうかもしれない。

参考文献

（＊１） 年代流行 https://nendai-ryuukou.com/ （ＣＤ売り上げのランキング、ダウンロードのランキング情報の引用）
音楽ダウンロード・音楽配信サイト mora https://mora.jp/ （曲の長さ情報の参考）

（＊２） 理解できるが賛同はできない AKB48 の CD 販売戦略 https://ameblo.jp/yukiakari-diary/entry-11560442843.html

（＊３） JOYSOUND 平成カラオケランキング https://www.joysound.com/web/s/karaoke/feature/heisei/ranking
（カラオケのランキング情報の引用）

（＊４） 人が快く感じる曲の長さは数千年前から決まっていた？ ヒットソングの多くが3分～5分である理由 https://citrus-net.jp/article/37388 （まとめの参考）

参考資料

売上ランキング

1969 1 いいじゃないの幸せならば/佐良直美(3:30)
2 夜明けのスキャット/由紀さおり(3:07)
3 どしゃぶりの雨の中で/和田アキ子(2:58)
1970 1 黒ネコのタンゴ/皆川おさむ
2 ドリフのズンドコ節/ザ・ドリフターズ(3:05)
3 圭子の夢は夜ひらく/藤圭子(4:11)
1971 1 わたしの城下町/小柳ルミ子(2:57)
2 知床旅情/加藤登紀子(3:24)
3 また逢う日まで/尾崎紀世彦(2:54)
1972 1 女のみち/宮史郎とぴんからトリオ(4:34)
2 瀬戸の花嫁/小柳ルミ子(3:18)
3 さよならをするために/ビリーバンバン(3:03)
1973 1 女のみち/宮史郎とぴんからトリオ(4:34)
2 女のねがい/宮史郎とぴんからトリオ(4:27)
3 学生街の喫茶店/ガロ(3:12)
1974 1 なみだの操/殿さまキングス(3:50)
2 あなた/小坂明子(4:50)
3 うそ/中条きよし
1975 1 昭和枯れすゝき/さくらと一郎(4:31)
2 シクラメンのかほり/布施明(4:34)
3 想い出まくら/小坂恭子(3:08)
1976 1 およげ！たいやきくん/子門真人(4:11)
2 ビューティフル・サンデー/ダニエル・ブーン(2:59)
3 北の宿から/都はるみ(3:52)
1977 1 渚のシンドバッド/ピンク・レディー(2:32)
2 青春時代/森田公一とトップギャラン(2:56)
3 ウォンテッド/ピンク・レディー(3:23)
1978 1 UFO/ピンク・レディー(3:13)
2 サウスポー/ピンク・レディー(3:36)
3 モンスター/ピンク・レディー(4:27)
1979 1 夢追い酒/渥美二郎(3:57)
2 魅せられて/ジュディ・オング(3:42)
3 おもいで酒/小林幸子
1980 1 ダンシング・オールナイト/もんた＆ブラザーズ(3:58)
2 異邦人/久保田早紀(3:45)
3 大都会/クリスタルキング(4:54)
1981 1 ルビーの指環/寺尾聰
2 奥飛騨慕情/竜鉄也(4:35)
3 スニーカーぶる～す/近藤真彦(3:50)
1982 1 待つわ/あみん(4:24)
2 セーラー服と機関銃/薬師丸ひろ子(4:33)
3 聖母たちのララバイ/岩崎宏美(4:19)
1983 1 さざんかの宿/大川栄策(4:37)
2 矢切の渡し/細川たかし(3:53)
3 めだかの兄妹/わらべ(3:22)
1984 1 もしも明日が…/わらべ(4:21)
2 ワインレッドの心/安全地帯(4:10)
3 Rock'n Rouge/松田聖子(4:14)
1985 1 ジュリアに傷心/チェッカーズ(3:59)
2 ミ・アモーレ/中森明菜(3:53)
3 恋におちて/小林明子(5:01)
1986 1 CHA-CHA-CHA/石井明美(3:38)
2 DESIRE/中森明菜(4:24)
3 仮面舞踏会/少年隊(3:48)
1987 1 命くれない/瀬川瑛子(4:39)
2 TANGO NOIR/中森明菜(4:08)
3 雪國/吉幾三(4:34)
1988 1 パラダイス銀河/光GENJI
2 ガラスの十代/光GENJI
3 Diamond ハリケーン/光GENJI
1989 1 Diamonds/プリンセス・プリンセス
2 世界でいちばん熱い夏/プリンセス・プリンセス
3 とんぼ/長渕剛(6:06)
1990 1 おどるポンポコリン/B.B.クィーンズ(3:15)
2 浪漫飛行/米米CLUB(4:10)
3 今すぐ Kiss Me/LINDBERG(3:56)
1991 1 ラブ・ストーリーは突然に/小田和正(4:55)
2 SAY YES/CHAGE＆ASKA(4:52)
3 愛は勝つ/KAN(4:07)
1992 1 君がいるだけで/米米CLUB(4:42)
2 悲しみは雪のように/浜田省吾(5:13)
3 BLOWIN'/B'z(3:55)
1993 1 YEA YEA YEA/ CHAGE＆ASKA(4:52)
2 愛のままにわがままに 僕は君だけを傷つけない /B'z(3:56)
3 ロード/THE 虎舞竜(4:29)
1994 1 innocent world/Mr.Children(5:45)
2 ロマンスの神様/広瀬香美(4:29)
3 恋しさと せつなさと 心強さと /篠原涼子 with t.komuro(4:22)
1995 1 LOVE LOVE LOVE/DREAMS COME TRUE(3:24)
2 WOW WAR TONIGHT～時には起こせよムーヴメント /H Jungle With t(5:56)
3 HELLO/福山雅治(3:58)
1996 1 名もなき詩/Mr.Children(5:28)
2 DEPARTURES/globe(5:15)
3 LA・LA・LA LOVE SONG /久保田利伸 with NAOMI CAMPBELL(4:49)
1997 1 CAN YOU CELEBRATE?/安室奈美恵(6:16)
2 硝子の少年/KinKi Kids(4:42)
3 ひだまりの詩/Le Couple(4:10)
1998 1 誘惑/GLAY(4:19)
2 夜空ノムコウ/SMAP(4:34)
3 my graduation/SPEED(5:30)
1999 1 だんご3兄弟/速水けんたろう,茂森あゆみ(2:10)
2 Winter,again/GLAY(5:13)
3 A/浜崎あゆみ
4 energy flow/坂本龍一(4:04)
2000 1 TSUNAMI/サザンオールスターズ(5:10)
2 桜坂/福山雅治(4:57)
3 Wait＆See～リスク～/宇多田ヒカル(4:48)
2001 1 Can You Keep A Secret?/宇多田ヒカル
2 M/浜崎あゆみ(4:27)
3 PIECES OF A DREAM/CHEMISTRY(4:59)
2002 1 H/浜崎あゆみ
2 traveling/宇多田ヒカル(5:14)
3 ワダツミの木/元ちとせ(5:55)
4 Life goes on / Dragon Ash(5:37)
2003 1 世界に一つだけの花/SMAP(4:41)
2 虹/ひまわり/それがすべてさ /福山雅治
3 COLORS/宇多田ヒカル(4:00)
4 さくら(独唱)/森山直太朗(4:15)
2004 1 瞳をとじて/平井堅(5:43)
2 Sign/Mr.Children(5:21)
3 Jupiter/平原綾香(6:03)
2005 1 青春アミーゴ/修二と彰(4:37)
2 さくら/ケツメイシ(5:19)
3 四次元 Four Dimensions/Mr.children
4 ＊ ～アスタリスク～/ORANGE RANGE(4:15)
2006 1 Real Face/KAT-TUN(5:15)
2 粉雪/レミオロメン(5:22)
3 青春アミーゴ/修二と彰(4:37)
2007 1 千の風になって/秋川雅史(4:34)
2 Flavor Of Life/宇多田ヒカル(4:47)
3 蕾/コブクロ(6:03)
2008 1 truth/風の向こうへ /嵐(4:49/3:40)
2 One Love/嵐(4:45)
3 I AM YOUR SINGER/サザンオールスターズ(4:26)
2009 1 Believe/曇りのち、快晴 /嵐/矢野健太 starring Satoshi Ohno(4:45)(4:28)
2 明日の記憶/Crazy Moon～キミ・ハ・ムテキ～ /嵐(4:58)(4:02)
3 マイガール/嵐(4:45)

ダウンロードランキング

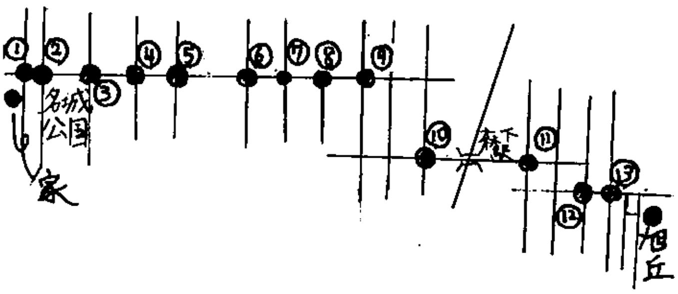
2010 1 Butterfly/木村カエラ(4:16)
2 タマシイレボリューション/Superfly(3:45)
3 ポニーテールとシュシュ/AKB48(4:31)
2011 1 Born This Way/Lady GaGa(4:20)
2 ミスター/KARA(3:12)
3 ジャンピン/KARA(2:58)
2012 1 Believe/Che'Nelle(4:34)
2 Call Me Maybe/Carly Rae Jepsen(3:13)
3 Happiness/AI(4:17)
2013 1 にんじゃりばんばん/きゃりーぱみゅぱみゅ(4:26)
2 We Are Never Ever Getting Back Together /テイラー・スウィフト(3:14)
3 恋するフォーチュンクッキー/AKB48(4:46)
2014 1 ﾚｯﾄｲｯﾄｺﾞｰ～ありのままで/松たか子(3:43)
2 ひまわりの約束/秦基博(5:14)
3 Story of My Life/One Direction(4:04)
2015 1 Dragon Night/SEKAI NO OWARI(3:44)
2 R.Y.U.S.E.I./三代目 J Soul Brothers(5:24)
3 SHAKE IT OFF/テイラー・スウィフト(3:39)
2016 1 海の声/浦島太郎(桐谷健太)(3:47)
2 365 日の紙飛行機/AKB48(4:42)
3 前前前世(movie ver.)/RADWIMPS(4:44)
2017 1 恋/星野源(4:13)
2 HANABI/Mr.Children(5:42)
3 ハッピーエンド/back number(5:14)
2018 1 Lemon/米津玄師(4:16)
2 U.S.A./DA PUMP(3:55)
3 アイノカタチ feat.HIDE(GReeeeN)/MISIA(4:26)

学校まで青信号で行ける確率

1年8組 竹内 冬耶

僕は毎日信号で止まる。毎日、自転車で学校に通っているのだが、学校にたどり着くまでには、いくつもの信号を乗り越える必要があるからだ。僕はある時「今日は1度も信号で止まらなかった」と感じた。これを切っ掛けにして数学ついこの前習った数字で表したら面白いのではないかと思った。実際に調査と計算を行った結果をまとめて見た。

今回僕は、西区にある自宅から普段登校しているコースで通過する13個の信号を調査した。1つずつ、信号の「青」、「赤」の秒数を計測し、その信号を青で通過できる確率を調べた。



尚、小数点以下は四捨五入し、整数で計算をした。また、今回は通過できるかできないかが問題となるので、信号機が青の状態を「青」、黄と赤の状態を「赤」として表す。また、平等な条件で計測するため、全て車道の信号を調査した。

次の表は、結果をまとめた物である。交差点の名前が無いものは付近の住所をかっこで囲って表記した。

家

<交差店名>	<青(秒)>	<赤(秒)>	<通過できる確率>
①(西区城西五丁目)	19	51	$\frac{19}{70}$
② 名城公園西	17	38	$\frac{17}{55}$
③ 名城公園北	56	94	$\frac{28}{75}$
④(北区柳原二丁目)	24	31	$\frac{24}{55}$
⑤ 柳原三	20	40	$\frac{1}{3}$
⑥ 清水四丁目	38	112	$\frac{19}{75}$
⑦ 清水五南	18	27	$\frac{2}{5}$
⑧ 大杉小学校西	28	32	$\frac{7}{15}$
⑨ 大杉町四	18	27	$\frac{2}{5}$
⑩(北区芳野三丁目)	18	52	$\frac{9}{35}$
⑪(東区東大曽根町)	28	52	$\frac{7}{20}$
⑫ 東大曽根町	32	58	$\frac{16}{45}$
⑬ 東大曽根町南四	21	39	$\frac{7}{20}$

旭丘

すべてをかけて計算すると、青信号で全て通過できる確率は、

$\frac{57,736,896}{59,820,556,640,625}$ となる。正直訳がわからないので、

パーセンテージで表すと、約 0.000097% という結果になった。

今回の結果から、僕が一度も信号に引っ掛かることなく、旭丘高校にたどりつける確率は、
約0.000097% ということがわかった。

これはつまり、1万回に1回よりも低い確率ということになる。1年に200日登校するとして、3年間では到底足りないということがわかる。

僕が始めの方に述べた、一度も信号にかからなかった日は、1万回に1度の奇跡だったと言うこともできる。

今回、こうして数字で考えてみると、僕のラッキーな体験は、ものすごく幸運なことだとわかった。普段の何気なく過ごしている生活の中にも、数字を出せば僕のように奇跡な体験をしているかもしれない。いつもは深く考えないことでも、数字にして出して見ることで、より小さなことでも幸せも感じられる心が育つとも言えるのではないだろうか。