
平成 31 年度（令和元年度）指定スーパーサイエンスハイスクール

SS 数学 U
自由課題研究(2020)

愛知県立旭丘高等学校

はじめに

愛知県立旭丘高等学校は、令和元年度（平成31年度）から、スーパーサイエンスハイスクール（SSH校）の指定を受け、本年度は2年目に当たります。研究開発課題は「イノベーションを創出し、トップリーダーとして日本の将来を拓き、世界を牽引する科学技術人材の育成」とし、第1、2学年では数学・理科でSS科目を設定するとともに3年間で5単位の課題研究を設け、研究開発課題の達成に向かって取り組んでいます。SS科目では「科学的探究を深く行う最高レベルの学問的能力・叡智（ソフィアとする）の獲得を目指した教育課程を研究開発する」を目的としています。

本冊子には、第2学年の数学SS科目である「SS数学U」の自由課題研究の生徒作品を掲載致しました。掲載作品は、7月末にグループ決定、課題設定し、夏休みの期間を中心に調査・探究したものを、9月～10月上旬の期間の授業で、発表し合い評価し合った作品のうち、生徒や教員の評価の高かったものです。

作品の中には、手書きのものもあり、ページ数も様々で、形式が整っておらず、また内容も十分とはいえませんが、各クラス2作品ずつを本冊子にまとめました。いずれの作品も、生徒が自由に設定した探究課題に取り組んだものです。

ご覧いただき、ご感想やご助言をいただけると幸いです。

愛知県立旭丘高等学校数学科一同

もくじ

1	はじめに	1
2	生徒作品	
1)	フラクタルをプログラムするーコッホ曲線の描写ー	2
2)	リレーの理想的なバトンパスを数学で求める	6
3)	コラッツ予想ってなあに?	10
4)	ヘロン、ブラーマグプタそしてその次は?	14
5)	誰が長生きするかゲーム	23
6)	フェルマーの小定理の拡張	29
7)	数理モデルで見る今後の日本と新型コロナウイルス	32
8)	ナッシュ均衡から考えるマスク買い占め	39
9)	電車の運行の解析～特急列車を走らせるには?～	42
10)	放物線で反射する光線	47
11)	四平方の定理の拡張 (余弦定理の拡張)	54
12)	投射角から考える「ダーツの旅」に当たりやすい町	59
13)	音階の仕組み	66
14)	天気の名は。	70
15)	積分と特殊関数について	73
16)	夏・冬の大三角の面積	80

◎研究の動機

昨年の情報(課題研究(基礎))の授業で、カオスの理論を表計算ソフトで実践した。その際、フラクタルというものがあることを知った。ぜひいつか実践してみたいと思っていたが、今回はコッホ曲線をプログラムで描くことに挑戦してみた。

◎フラクタルとは?[フラクタルになる条件①~⑥]

- ①微細な構造をもつ (=すごく細かいパーツに分かれる)
- ②自己相似である (=以下図3参照)
- ③古典的な幾何や数学の方法では扱えない
- ④「大きさ」は測り方によって異なる
- ⑤簡単な操作の繰り返しで作られる
- ⑥自然界に似たものがある

このような性質をもつ
曲線や図形=フラクタル
※1975年にブノア・マルテンブロが
ラテン語の fractus から造語

◎コッホ曲線とは?

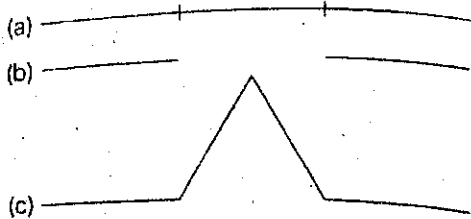


図1 コッホ曲線を描く基本的な手順:(a)線分を3等分する。(b)中央の3分の1を消す。(c)消したところに正三角形の2辺を描く。

作り方

適当な長さの線分を3等分し、正三角形を継ぎ足していく。この繰り返し。
→これだけで描ける。(=条件⑤に該当。)

※コッホ曲線は、スウェーデンの数学者ヘリエ・ファン・コッホ(Helge von Koch, 1870-1924)が1904年に考え出した。

※ここでいう「曲線」は、端から端までつながっている線という意味で、なめらかな線という意味ではない。

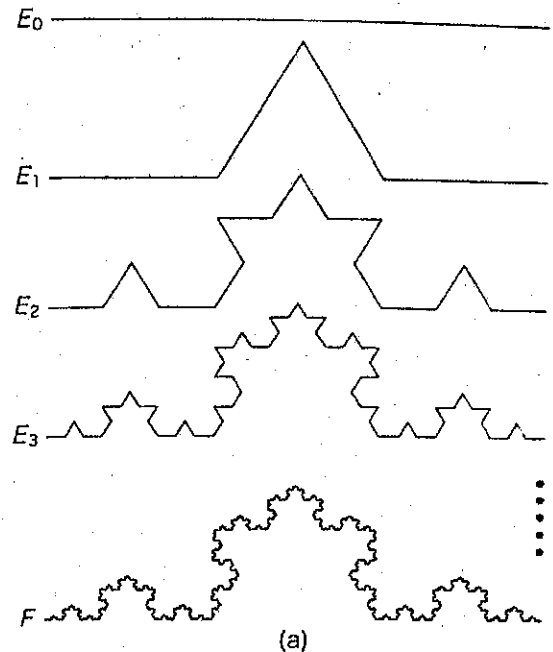


図2 (a)コッホ曲線 F を作成する途中の段階 E_0, E_1, E_2 .

◎コッホ曲線の特徴

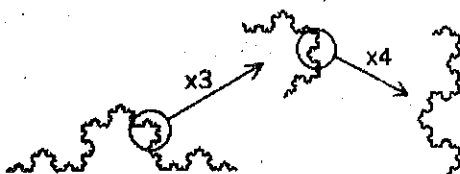
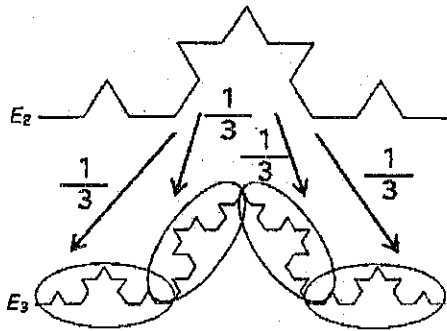


図3 コッホ曲線をいくら拡大してもやはり不規則なまま。

・コッホ曲線は、ギザギザを拡大しても同じギザギザが次々と現れる。これはずっと同じ操作(3等分→正三角形)を繰り返したからで、「微細な構造をもつ」。(=条件①)



また、例えば図2(a)の E_2 と E_3 を取り出すと、
 E_3 は E_2 をそれぞれ $\frac{1}{3}$ したもの4つであることがわかり、
 これを自己相似という。(=条件②)

- 各点の接点=曲線上を動く点の瞬間的な方向(微分・積分で重要)を
 コッホ曲線では定められない。(=条件③)
- 大きさも測定方法により異なる。(=条件④)
- 左図(b)のようにコッホの雪片曲線が作れる。(=条件⑥)

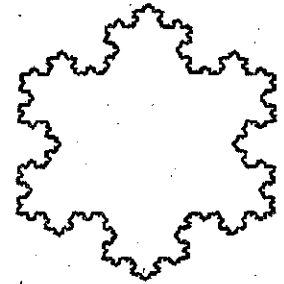


図2
 (b)コッホ曲線3つを組合わせた
 コッホの雪片曲線。

よって、コッホ曲線は条件①～条件⑥をすべて満たす
 フラクタル図形なのである。

◎プログラムしよう

今回はコッホ曲線をプログラミングで描いていく。

作業環境…Windows 10 Home / HSP ver 3.4

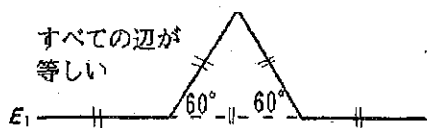
※HSP(Hot Soup Processor)…日本で開発された、「誰でも手軽に使うことのできるスクリプト言語システム」。Windows上などで作動。初心者でもプログラムを比較的簡単に作るができると思う(筆者より)。

1 コッホ曲線を描きたいのだが…

《問題点》

コッホ曲線を描きたいのだが、人間のように「3等分して正三角形を作れ」と指定するのは難しい。図2(a) $E_0 \rightarrow E_1$ なら直線からだからまだしも、 $E_1 \rightarrow E_2$ 以降は傾斜している直線を3等分したりするのでプログラムが大変。

《考えたこと》

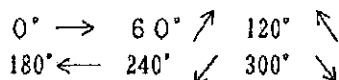


考えてみると、例えば図2(a) E_1 において、すべての辺(線分の一部)が等しくなっていることがわかる。これは E_2 , E_3 , …
 においても同じことである。

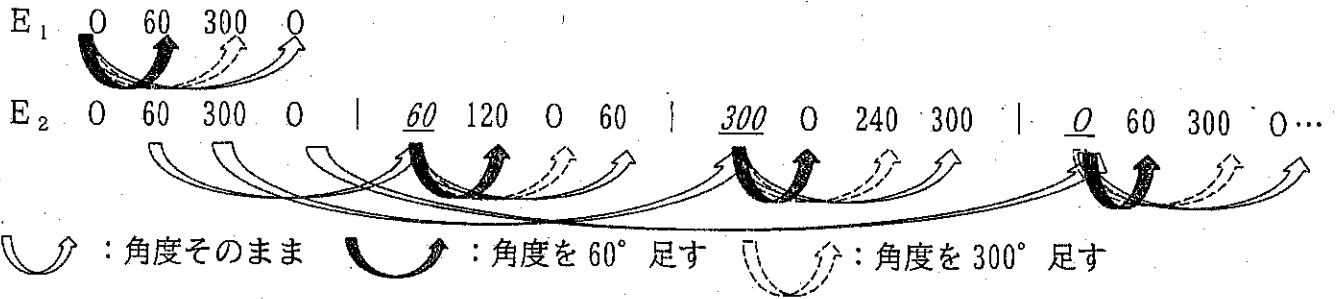
よって曲線を描くときに線分の長さは一括で指定できる。



また、線分の一部のすべてで始点から終点へと印をつける(→)と、左図(E_3 の一部を抜粋)のように6種類の線分しかないことがわかった。それぞれに対し、角度をつけておく。



角度を付け終わったら、それがどのような順序で並んでいるかを考える。



(単位:°)

最初の 0, 60, 300, 0, ... を 1 番目, 2 番目, 3 番目, 4 番目... と数えていくこととする。

線分を 4 つずつのかたまりにわけると、先頭のかたまりは 0, 60, 300, 0 であることは E_1, E_2, \dots について共通である。

2 つ目以降のかたまりにおいて、まず 太字斜線 で示したそれぞれの ^{n 番目の} 先頭は、 $\frac{n+3}{4}$ 番目の数と同一である。 で示してある)

また、かたまりの先頭が決まれば、あとは正三角形を描いていく過程であるから、かたまりの 2 番目は角度を 60° 足す ()、3 番目は 300° 足す ()、4 番目 (最後) は先頭と同じ () である。

※これらの過程で 360° を超過した場合は、360° を角度から引く。

★あるかたまりにおいて、

$d, d+60, d+300, d$ という並びになる。

※^{n 番目の} n 番目の角度において、1 番目の角度は 0 とし、かたまりの先頭 d は $\frac{n+3}{4}$ 番目と同一である。

n 番目の角度 $> 360^\circ$ のとき、360 を引く。

2 プログラムしてみよう

*プログラムスクリプト概要

```
*syoki
#include "hspmath.as"
~ (中略) ~
```

```
OA
l=999.0/(powf(3,n-1))
```

```
yoko=l/2
tate=l/2*sqrt(3)
```

```
~ (中略) ~
kari(1)=0
kari(2)=60
kari(3)=300
kari(4)=0
```

```
akaku(1)=0
```

```
akaku(2)=60
akaku(3)=300
akaku(4)=0
```

```
d2=5
total=3
*sinkakugimeOB
if d2 % 4 = 1 : goto *amari1
if d2 % 4 = 2 : goto *amari2
if d2 % 4 = 3 : goto *amari3
if d2 % 4 = 0 : goto *amari4
```

```
*genkaiOC
d2=d2+1
lim=powf(4,total-1)
if d2>lim : goto *kuri
```

```
goto *sinkakugime
```

```
*kuri
total=total+1
if total>n : goto *iti
goto *sinkakugime
```

```
*amari1OD
m=kari((d2+3)/4)
if m>360 : m=m-360
akaku(d2)=m
kari(d2)=akaku(d2)
goto *genkai
```

//*amari2・3 は、それぞれ *amari1 の 2 行目と 3 行目の間に、

m=m+60,m=m+300 を挿入したものの。*amari4 は*amari1 と同様。

~ (中略) ~

*hantei

//それぞれ akaku(x)で、その角度 d に対し、*degree d へジャンプする。

*degree E

line x+l,y+0,x,y

mes

x=x+l

y=y

d=d+1

goto *hantei

//*degree 60,120,180,240,300 においても、line を x,y,tate,yoko を用いて計算する。

~ (略) ~

○A...1 辺の長さ、および cos, sin を用いて斜辺の座標増加分を計算

○B...かたまりの何番目なのかを判定 (4 で割ったあまりで計算; ¥ は余りの演算記号)

○C...辺の数を計算し、それを超過しないよう判定

○D...かたまりの何番目なのかに応じて先頭ならば $\frac{n+3}{4}$ 番目, 2 番目以降なら先頭に (n 番目)

所定の角度を足すよう計算

○E...描写する (角度に応じて直線/斜線/向きなどを変えて描写)

*プログラム実行結果レイアウト (実行結果はトリミングし拡大表示している)

コッホ曲線プログラム

コッホ曲線のプログラム

コッホ曲線を描くプログラムです。
コッホ曲線の分割操作の回数を入力してください:
(直線は1,1回操作したものを2とします)

6

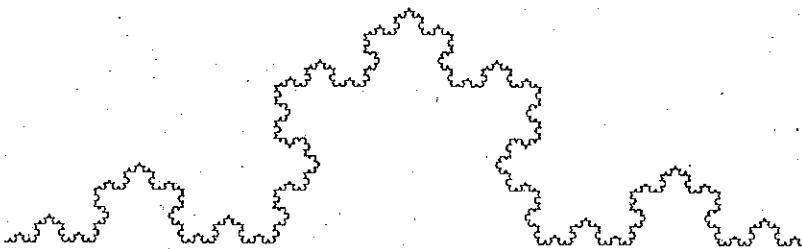
入力できる数字は1~9です

※大きい数字は描写に時間がかかります。フリーズしないよう注意してください。

入力完了

実行結果

実行



・コッホ曲線を何回分割するか (図 2 (a) でいう E_1, E_2, \dots などの下付き文字など) を入力できるようになっている。

・整数ではなく小数点を含んだ実数で計算しているため、細かい表示が可能。

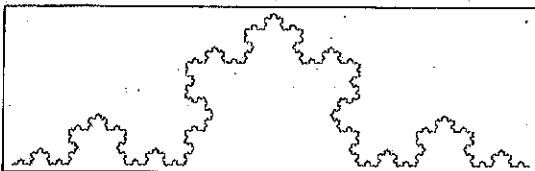
・コンピュータの処理能力により E_8 を限度とした。

(入力値で言うならば 9)

・ E_0, E_1 は別途スクリプトを記述

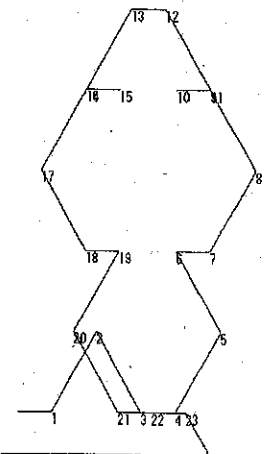
左上: スタート画面

左下: E_6 (入力値 6) での実行結果



← E_8 の実行結果。

処理開始から描写終了まで
約 8 秒 30 かった。



プログラムの試行錯誤の過程 (完成前)。ただ単に 4 つ前のものに 60 度足した角で描写しているなどの原因でうまく描写できていない。→

◎まとめ

今回コッホ曲線を描くにあたり、かなり大変だった。プログラムで図形を描くには様々なことを把握していないといけないのだということを実感した。しかしフラクタル図形はたくさんあるため、他のものも是非今度描写してみたいと思う。

◎参考, 図 1 ~ 図 3 引用: 『フラクタル』ケネス・ファルコナー著/岩波科学ライブラリー 291

リレーの理想的なバトンパスを数学で求める

20120 八神 顕人

1. はじめに

数学の自由研究のネタに詰まっていた、何か身近なことについて研究しようとしていた時に陸上部である自分にとって大切なバトンパスを数学と結びつけられないかと思い挑戦してみた。

2. 内容

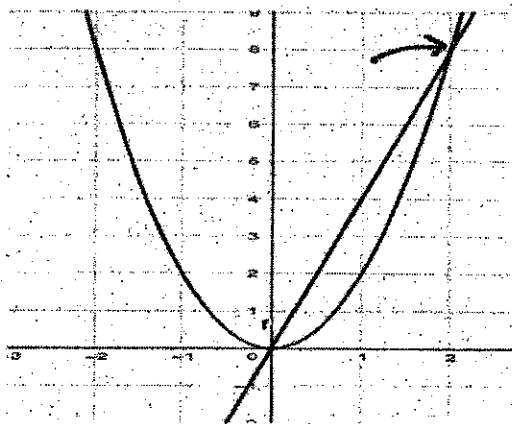
この研究では、バトンパスにおいてバトンをもらう側がどの位置から出れば最も効率よく無駄のないバトンパスになるかを調べた。

① 基本的な考え方

理想的なバトンパスをグラフを用いて考えていきたいと思う。ここではバトンを渡す走者(以後 A とする)を等速直線運動(実際は100m終盤では緩やかに減速)、バトンをもらう走者(以後 B とする)を等加速度運動と仮定して考える。B が走り出してから時間を $x(0 \leq x)$ 、B のスタート地点からの距離を y とする。

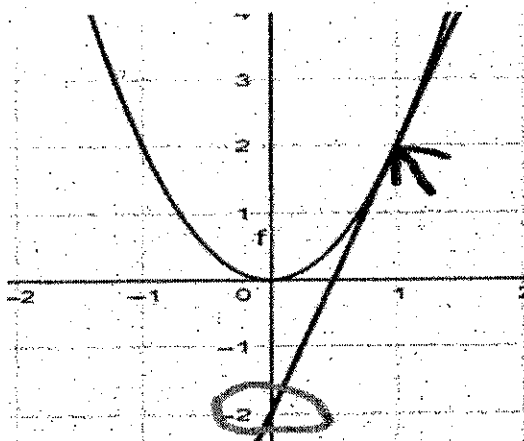
A の関数 $f_A(x) = 4x + b(b \leq 0)$ 、B の関数 $f_B(x) = 2x^2$ と設定する。

グラフ1 $b=0$ のとき



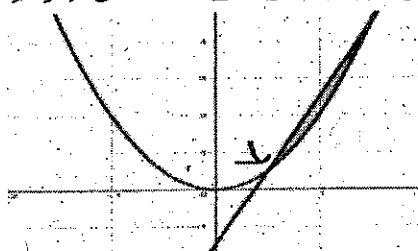
A が B に追いついたとき(A が B のスタート地点に来てから)B がスタートしている。バトンパスの地点は、二つのグラフの交点(矢印の場所)でありこれでは追い抜かれてからバトンパスが行われ、理想的なバトンパスとはいえない。

グラフ2 $b=-2$ のとき



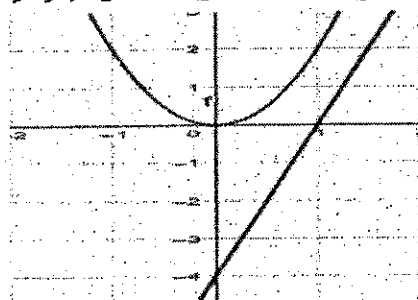
B は A が 2 m 後ろに来た時点で走り出している。二つのグラフは接していて両者の速度(=傾き)が同じになったところでバトンパスが行われていて無駄のない理想的なバトンパスとなっている。

グラフ3 $-2 < b < 0$ のとき



バトンパスは B の加速がまだあまり進んでいない時点で行われて、斜線部分がロスタイムになってしまう。

グラフ4 $b < -2$ のとき



上の場合とは異なり A と B との距離が大きいと共有点を持たず、バトンパスは行われぬ。

以上の結果から A、B のグラフが接するときが理想的なバトンパスとなる。

② データの収集と作図

A のデータは 5m、10m、15m、20m のラップタイムを取り縦軸を距離(m)、横軸を時間(秒)とした xy 平面に点をプロットして近似曲線(二次関数で原点を通るから $f(x) = ax^2 + bx$ 型である)として表した。

B のデータは 100m 走のラスト 10m の平均の速さを速度と見なした等速直線運動 (A がバトンパスを行う地点付近ではスピードが少しずつ落ちるがそれは緩やかになっているため)とした。またバトンパスによる利得距離も考慮した。

またテイクオーバーゾーンが 20m ということを考えると接点は $0 \leq y \leq 20$ の範囲に収まることになる。

Aのデータ(それぞれ三回計測)

5m 1.29 1.31 1.30 平均 1.30s

10m 2.11 2.08 2.11 平均 2.10s

15m 2.71 2.68 2.71 平均 2.70s

20m 3.52 3.45 3.54 平均 3.50s

Bのデータ(三回計測)

7.92 8.04 8.02 平均 8.0m/s 利得距離 $0.5+0.6=1.1\text{m}$

以上のデータより、Aの関数は GeoGebra で近似して、 $f_A(x) = 1.5x^2 + 1.4x$
Bの関数は、 $f_B(x) = 8x + b - 1.1$ となる。

ここから二つのグラフが接する条件を考え、bを導く。

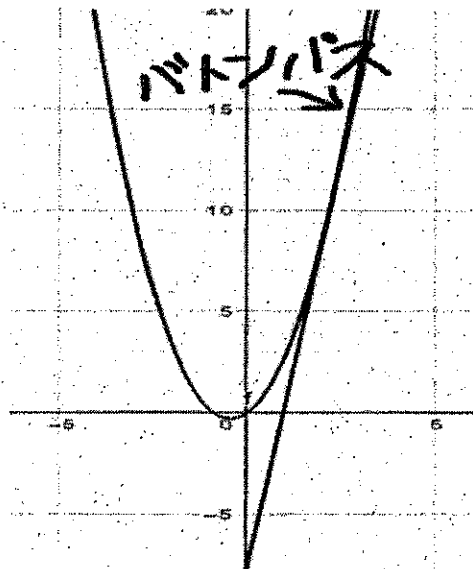
$f'_B(x) = 3x + 1.4$ で傾き8, 曲線 B 上で $x=t$ を通る接線は

$3t+1.4=8$ $t=2.2$ より y 座標は 10.34 から曲線 B 上の点(2.2,10)を通る
(これは上記の条件を満たしている)

従って $10=8 \times 2.2 + b - 1.1$ $b=-6.5$

この結果より、B は A が7.6m後ろに到達したときスタートを切るのが理想的となる。

グラフに表すと次のようになる。



3. 結果と考察

今回の実験は実際に部活の友人とともにいき、数式を作り、計算をした。

実際のスタートの距離とは約1mほどずれがあった。この原因はデータの収集が

手動計測であったこと、データが少なく正確なグラフが描けなかった事にあると思われる。二次関数でなくさらに高次のグラフで近似するとさらに正確に描けると思う。また、自分にこれらのデータを使ってグラフを作成するための技量が欠如していたことも考えられる。今回の陸上のように身の回りの現象を物理学的、数学的観点から考察する力をつけていきたい。

4. 参考文献

https://tk.ismcdn.jp/mwimgs/1/3/1040/img_13aa3aa12f19d6d9c402a2aa211eece320923.jpg

https://www.hamaspo.com/files/2014/11/20141109204049_AYAN1qXl.png

コラッツ予想ってなあに？

20220 西原 涼ノ介

さて皆さん、「コラッツ予想」なるものをご存じでしょうか。

あー、「チェリー」とか「春の歌」とかが特に有名なバンド…

いやそれはスピッツ。

あーあれね！紫色のネズミみたいなポケモン…

いやそれはコラッタ。

NBA のデンバー・ナゲッツで 15 番つけてるセンターの…

いやそれはヨキッチ。(誰が分かるんこれ)

さて、ファボ 0 のポケはこのくらいにしておいて、本題に入りましょう。

・コラッツ予想とは？

コラッツ予想とは、数学の未解決問題のひとつです。内容は以下の通りです。

ある自然数について

- ・偶数の時は、2 でわる。
- ・奇数の時は、3 をかけて 1 をたす。

この操作を繰り返すと、どんな数でも必ず 1 になる。

というものです。

1937 年にローター・コラッツが提唱したことからこう呼ばれています。

仰々しい名前に反して、仕組みはとても簡単。試しに 3 でやってみましょう。

$3 \rightarrow 10 (3 \times 3 + 1) \rightarrow 5 (10 \div 2) \rightarrow 16 (5 \times 3 + 1) \rightarrow 8 (16 \div 2) \rightarrow$
 $4 (8 \div 2) \rightarrow 2 (4 \div 2) \rightarrow 1 (2 \div 2)$

はい、ちゃんと 1 になりましたね。今回は 7 回の操作で 1 に到達しました。

・1 から 100 までやってみる

とりあえず 1 から 100 (100 付近) までこの操作を行い、何回で 1 に到達するのかを調べました。結果が次ページの写真です。

最も操作回数が多かった数字は97で、
操作回数は118回でした。

● さて、写真の中でマルで括られている数が
いくつもありますが、これは隣り合う数字で、操作
回数と同じであったものを括ったものです。
(今回は2つセットを「双子コラッツ」、3つセットを
「三つ子コラッツ」などと呼ぶことにします。)
なんと、1から102までの間に、

- 双子コラッツ…18
- 三つ子コラッツ…5
- 五つ子コラッツ…1

の多胎児コラッツたちを発見し、その多さには
ビッグダディもびっくりです。

では、双子コラッツのペアが1にたどり着くまでに
似たようなルートを通るかという、そういう訳では
ありません。例えば14と15でみると、

14…14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13,
40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

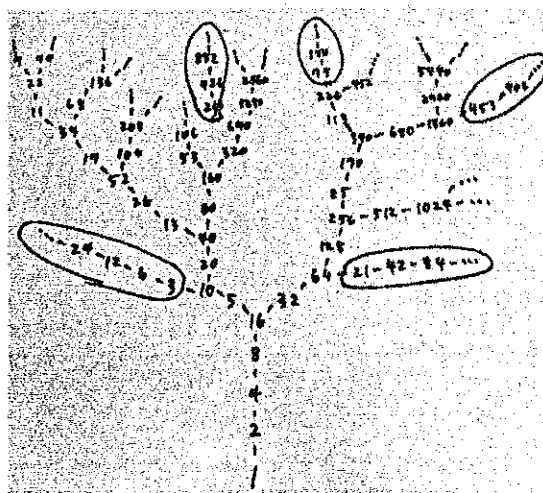
15…15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80,
40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

と、後半は一致していますが、前半は全く別のルートをたどっています。
とても不思議ですね。

・逆算してみる

コラッツ予想の操作をして1にたどりつく
には、必ずひとつ前で2を通る必要があり
ます。そのひとつ前は4、もうひとつ前は
8、さらにひとつ前は16です。16まで
逆走したところで、32(16×2)と
5((16-1)÷3)に分岐します。そのよ
うにしていく様を表にすると、樹のように
際限なく枝分かれしていきます。

1→0	32→5	63→107	94→105
2→1	33→25	64→6	95→105
3→7	34→13	65→27	96→12
4→2	35→13	66→27	97→118
5→5	36→21	67→37	98→25
6→8	37→21	68→14	99→25
7→16	38→21	69→14	100→25
8→3	39→34	70→14	101→25
9→19	40→8	71→102	102→25
10→6	41→109	72→22	
11→14	42→8	73→115	
12→9	43→29	74→22	
13→9	44→16	75→14	
14→17	45→16	76→22	
15→17	46→16	77→22	
16→4	47→104	78→35	
17→12	48→11	79→35	
18→20	49→24	80→9	
19→20	50→24	81→22	
20→7	51→24	82→110	
21→7	52→11	83→110	
22→15	53→11	84→9	
23→15	54→112	85→9	
24→10	55→112	86→30	
25→23	56→19	87→30	
26→10	57→32	88→17	
27→111	58→19	89→30	
28→18	59→32	90→17	
29→18	60→19	91→92	
30→18	61→19	92→17	
31→106	62→107	93→17	



ある程度まで書いた表が前ページです。

この表を書いている、気づいたことが2つあります。それは

- ・分岐する部分の数字は $3n + 1$ (n は自然数) で表されること
- ・二度と分岐しない枝がいくつかあらわれたこと (画像のマルで囲まれた部分) です。

一つ目は当たり前のこととして、なぜ二つ目のようなことが起こるのか検証します。

・分岐しない枝

では、分岐しない枝はどのような条件下で生まれるのか説明します。

整数を場合分けし、パターンごとの分岐の仕方を調べます。

以下、 n は自然数を表すこととします。

整数は $3n$ 、 $3n + 1$ 、 $3n + 2$ の3種類に分けることができます。

(i) $3n + 1$ のとき

$3n + 1$ のときは、 $6n + 2$ 、 n の2つに分かれます。

(ii) $3n + 2$ のとき

$3n + 2$ のときは、分岐せず $6n + 4$ となります。

ですが、 $6n + 4 = 3(n + 1) + 1$ より、次で $12n + 8$ 、 $n + 1$ の2つに分岐します。

(iii) $3n$ のとき

$3n$ のときは、分岐せず $6n$ となります。

次では $12n$ となります。

その次は $24n$ 、 $48n$ 、 $96n$...

このように、 $3n$ から先は二度と分岐することはありません。

以上より、 $3n$ より後では分岐が起きないと分かります。

では、 $3n$ が生まれる前の数 (枝分かれする節の部分) はどのような数値なのでしょう。

$3n$ が偶数のときについては、考える必要がありません。

なぜなら、 $3n$ が偶数のとき $3n$ にする操作は、 $3n$ が奇数になるまで2で割り続けるものだからです。

$3n$ が奇数のとき、ひとつ前の整数は

$3 \times 3n + 1 = 9n + 1$ となります。

よって、分岐しない枝は $9n + 1$ から派生することが分かりました。

実際に表でみると、

28, 64, 226, 640, 1360

と、どれも $9n+1$ で表すことができる数なので、どうやら正しそうです。

以上より

$9n+1$ からは二度と分岐しない枝が派生する

という、コラッツ予想に関するひとつのルール(?)を発見しました。

・まとめ

仕組みは簡単なのに、世界中の数学者たちを長きにわたり悩ませている「コラッツ予想」
いかがだったでしょうか。とても興味深いですね。

本当に未解決問題なの?と思ったあなた。ぜひ証明してみてください。

証明できたらゲットした多額の懸賞金で僕を焼き肉に連れて行ってください。

ヘロン、ブラーマグプタそしてその次は？

伊藤 貫

皆さんは何の図形が好きですか？

僕は特には図形の好みはありません（笑）

そんな図形ですがやっぱり図形といったら面積だ！！と思う人が多いのではないのでしょうか？でもただの図形の面積を求めるのは面白くないと思ったので今回は円に内接する多角形の面積を求めていきたいと思います！

1. まず、円に内接する正多角形の面積を求めていく (S は求める面積とし、r は外接円の半径一辺のながさを a とする)

正三角形について考える

円に内接する正三角形は円の中心と頂点を結ぶと3つの合同な三角形について考える。

1つの三角形の面積は $s = a \times a \times \sin \frac{\pi}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

よって、正三角形の面積は $S = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3}{4} \sqrt{3} a^2$

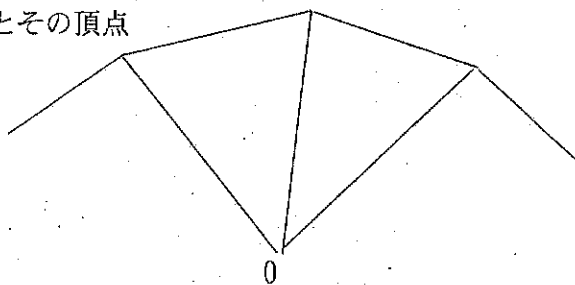
次に正方形の面積も同様に求めると $S = \frac{1}{2} a^2$

このように正八角形までを求めたものは下の表のようになる。

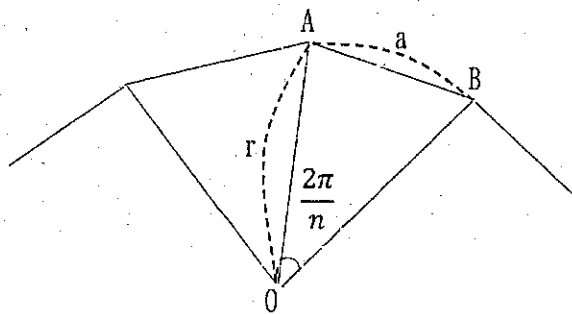
図形	三角形	四角形	五角形	六角形	八角形	十二角形
面積	$\frac{1}{4} \sqrt{3} a^2$	a^2	$\frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{4} a^2$	$\frac{3}{2} \sqrt{3} a^2$	$2 + 2\sqrt{2} a^2$	$(6 + 3\sqrt{3}) a^2$

ここからこれを一般化をします。

正 n 角形の中心を O とその頂点を結ぶ二等辺三角形について考える。



二等辺三角形のうち一つを $\triangle OAB$ として正 n 角形に外接する半径 r の円を考える。



$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times r \times r \times \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$$

と表すことができ、求める面積はこの二等辺三角形 n 個分であるから
 $S = \triangle OAB \times n$

$$= \frac{1}{2} n r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$$

面積を辺の長さのみを用いてときたいので次に r の値を a で表していく。 O から AB へ垂線 OH を引く。

$\triangle OAH$ で正弦の定義より

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{\frac{1}{2}a}{r}$$

$$\therefore r = \frac{\frac{1}{2}a}{\sin \frac{\pi}{n}}$$

これを①の式に代入すると

$$\begin{aligned} \triangle OAB &= \frac{1}{2} n \left(\frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \right)^2 \sin \frac{2\pi}{n} \\ &= n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\pi}{n}} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} n \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} a^2$$

$$= \frac{na^2}{4 \tan \frac{\pi}{n}}$$

2. 次に円に内接する (頂点が円周上にある) が多角形について考えていく

円に内接三角形と四角形は今までに定理として発見されているのでそれを証明していく。

三角形の場合 ヘロンの公式

三辺の長さを a, b, c の三角形の面積 S は

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

と置くと

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

と計算できる

証明

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$= \frac{1}{2} ab \sqrt{1 - \cos^2 C}$$

$$= \frac{1}{2} ab \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{\{(a+b)^2 - c^2\} \{c^2 - (a-b)^2\}}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a-b+c)(-a+b+c)(a+b-c)}$$

$$= \sqrt{\frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2}}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

次に円に内接する四角形では
 ブラーマグプタの定理が成り立つ

円に内接する四角形 ABCD において $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ とおくと、四角形 ABCD の面積は、

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ただし、 $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ とおいた

証明

$$\begin{aligned} S^2 &= \left(\frac{1}{2}ad \sin A + \frac{1}{2}bc \sin C \right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(ad + bc)^2(1 - \cos^2 A) \\ &= \frac{1}{16}\{4(ad + bc)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2\} \\ &= \frac{a+b+c-d}{2} \cdot \frac{a-b+c+d}{2} \cdot \frac{-a+b+c+d}{2} \cdot \frac{a+b-c+d}{2} \\ \therefore S &= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \end{aligned}$$

これはヘロンの公式を四角形で拡張したものである。

ここでこれを五角形まで拡張できないものかと考えた。

しかし、調べたことによると五角形の面積は同様には表すことができないと証明されているみたいだ。

完全な証明をすることは難しいので大体の証明をする。

図のように円内の五角形を 3 つの三角形を分割し、頂点 A から引いた対角線の長さを u, v とする。辺の長さの組は $\{a, b, u\}$, $\{u, v, e\}$, $\{c, d, v\}$ となり、これが共通の外接円を持つためヘロンの公式を適用すると以下の連立方程式を利用する

$$\begin{aligned} g_1 &= (a+b-u)(-a+b+u)(a-b+u)(a+b+u)r^2 - a^2b^2u^2 \\ g_2 &= (u+v-e)(v+e-u)(e+u-v)(e+v+u)r^2 - u^2v^2e^2 \\ g_3 &= (c+d-v)(d+v-c)(v+c-d)(d+v+c)r^2 - d^2v^2c^2 \end{aligned}$$

これらは 7 つの未知数があるが 3 つの方程式しかないので一般的に解けない。

しかし u, v, r は自分が勝手に置いた文字なので別に数字としてでなくてもよいしたがって u, r, v を除去する方針で求めていくといい。

計算を楽にするため

$$a+b+u=2x$$

$$u+v+e=2y$$

$$c+d+v=2z \quad \text{とすると、}$$

$$g_1 = 16x(x-u)(x-a)(x-b)r^2 - a^2b^2u^2 = 0$$

$$g_2 = 16y(y-e)(y-u)(y-v)r^2 - u^2v^2e^2 = 0$$

$$g_3 = 16z(z-v)(z-c)(z-d)r^2 - d^2v^2c^2 = 0$$

したがってヘロンの公式から

$$S = \sqrt{x(x-u)(x-a)(x-b)} + \sqrt{y(y-e)(y-u)(y-v)} + \sqrt{z(z-v)(z-c)(z-d)}$$

正弦定理より△ABCの面積 $\sin B = \frac{u}{2r}$

$$S_1 = \frac{1}{2}ab \sin B = \frac{abe}{4r}$$

同様に△ADE と△ACD の面積をそれぞれ S_2, S_3 として求めると、

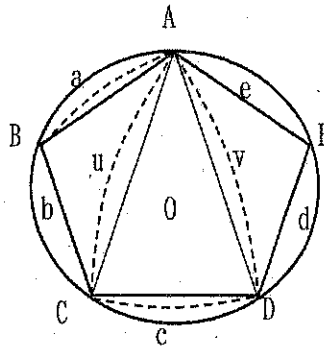
$$S_2 = \frac{edv}{4r}$$

$$S_3 = \frac{uvc}{4r}$$

したがって内接する五角形の面 S は

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = (abe + edv + uvc)r^{-1}$$

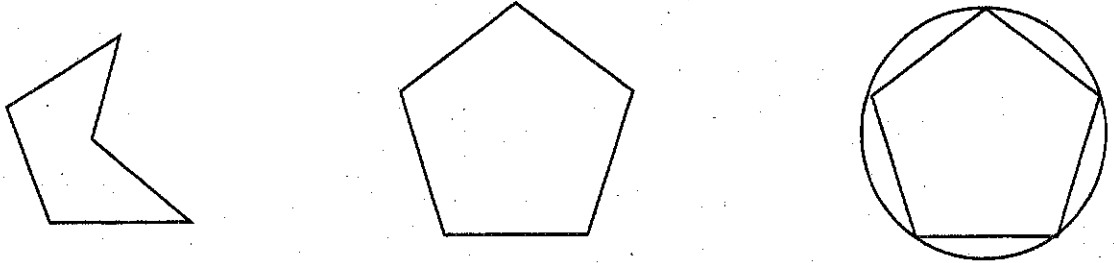
よって u, v, r を除去することができない。



以上より円に内接する五角形の面積は辺だけで表す式はないとなる。しかし、これは五

角形が

下のようにいろんな場合を考えてしまっているからである。だけでも僕が普段円に内接する五角形という一番左のような場合を思い浮かべる。だから、今回は図形が凸で頂点が円周上にある場合だけに絞ってどのような条件下なら面積を求めることができるのかについて考えていく。

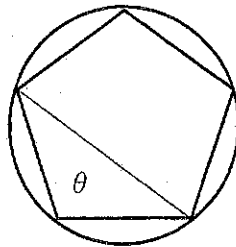


五角形

判明している辺や角によって二つの場合にわけた。(極力必要な条件を減らした。)

ただし辺は a, b, c, d, e とする。

(イ) 辺の長さとおある一つの角がわかっていると仮定すると θ を頂点とする三角形と四角形に分ける。



すると三角形は二辺夾角が分かっているので

三角形の面積は $\frac{1}{2}ab\sin\theta$

また余弦定理より $BD = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta}$ なので

四角形の面積はブラーマグプタの定理より

$$\sqrt{(s-a)(s-BD)(s-e)(s-d)}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}ab\sin\theta + \sqrt{(s-a)(s-\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\theta})(s-e)(s-d)}$$

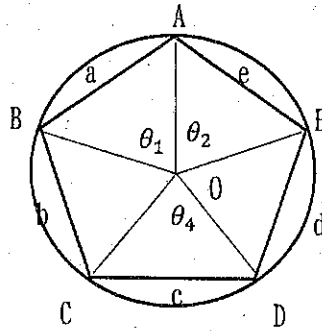
(ロ) すべての辺の長さを中心と頂点を結んだ線の間角の大きさがわかっている場合

$$\sum_{k=1}^5 \theta_k = 2\pi$$

$$\Delta OAB = \frac{a^2}{8\sin \theta_1}$$

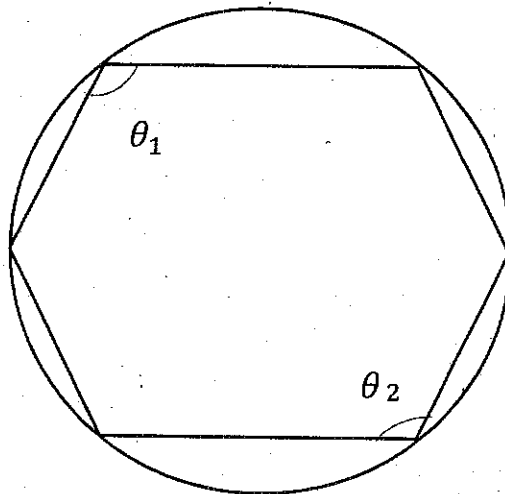
同様に ΔOBC と ΔOCD と ΔODE と ΔOEA を求めて足していくと

$$S = \frac{a^2}{8\sin \theta_1} + \frac{b^2}{8\sin \theta_2} + \frac{c^2}{8\sin \theta_3} + \frac{d^2}{8\sin \theta_4} + \frac{e^2}{8\sin \theta_5}$$



次に六角形について考える

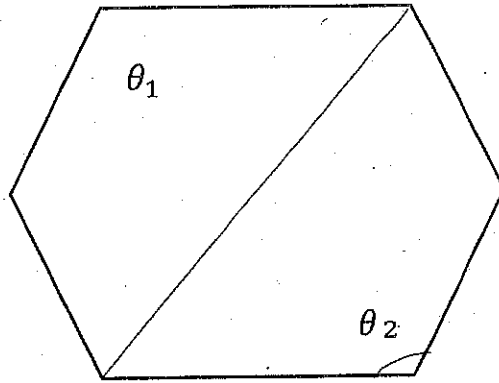
この時に大きな問題が浮上する。それは五角形と同じような条件では計算できないのである、五角形と同様にすべての辺の長さや中心と頂点を結んだ線の間角の大きさがわかっている場合は同様に解けるが辺の長さや一つの内角だけでは解けないのだ。しかし、もう一つの内角がわかれば解ける。



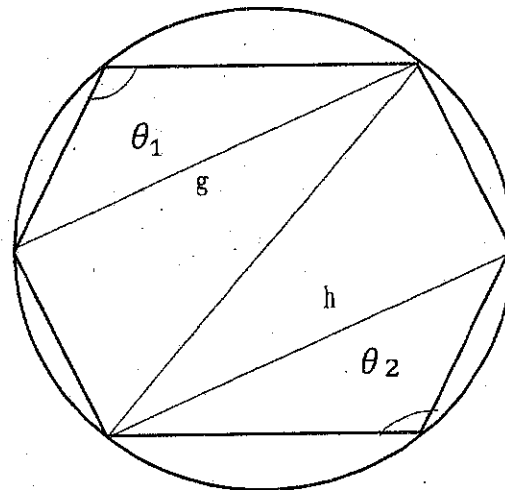
(以前までのように辺の長さは時計回りに a, b……とする)

そして円に内接している六角形を対角線を引いて四角形二つに分ける。





そして分かっている角を持つ三角形に分けると

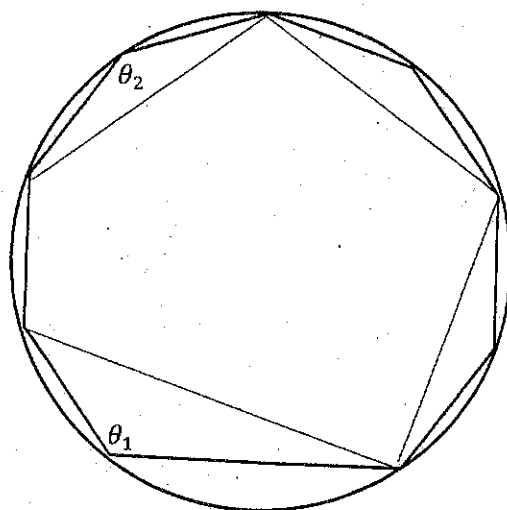


すると余弦定理より g , h の長さが分かる。そしてその中にできる四角形の4辺の長さが分かっているのでブラーマグプタの定理よりなかの図形の面積を求めることができ、そして二つの三角形は二辺夾角がわかるので面積は求めることができるよって2つの角が分かれば解けるといえる。

ここから n 角形においては $(n-4)$ 個の点と辺の長さがわかれば n 角形の面積を求めることができるかと予想することができる ($n \geq 5$)。

(8角形までは成立する)

しかし九角形の際は



上の図より九角形は三角形を作っていくと中に五角形ができてしまう。前に五角形は辺の長さの一つの角が分からないと計算はできないので九角形は辺の長さの角の大きさが分かっただけでは計算できないと考えられる。
したがってこれ以上の多角形では角と辺の条件では計算できない。

まとめ

このように、円に内接する多角形では $(n-4)$ 個の点と辺の長さが分かれば 8 角形までは面積を求めることができるということがわかりました！

でも最初の予想ではもう少し多くの多角形で当てはまるんじゃないかなと思っていたので少し期待外れになってしまいました (笑)

なんで次回は

五角形や六角形の面積をより少ない条件で面積を求めることができるのではないかと？とブラーマグプタの定理を空間に拡張することはできるのか。またそれに似たものが存在するのかについて研究したいと思います。

参考文献

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2054-17.pdf>

<https://oshiete.goo.ne.jp/qa/5883141.html>

<http://henryhenry6.jugem.jp/?eid=1527>

誰が長生きするかゲーム

203 32番 柴田快音

サイコロの確率によって食事ができるというゲームを開催してみました。

<動機>

良いゲームを思いついたけど実践できないし、時間がかかる。

<方法>

(A)サイコロ2個を食前にふり、ゾロ目が出たら700kcalのご飯が食べれる。

(B)サイコロ2個を食前にふり、ゾロ目が出たら朝なら500kcal、昼は700kcal、夜は900kcalのご飯が食べれる。

(C)サイコロ2個を食前にふり、ゾロ目の数×200のkcalのご飯が食べれる。

(D)常に3食食べれるが、サイコロ1個の出た目×100kcalしか食べれない。

(E)サイコロ2個がどちらも1の時、1200kcalのご飯が食べれる。

(F)サイコロが、ジョギング30分しなければ手に入れられない場所にあり、食前にふるサイコロの目が偶数の時、700kcalのご飯が食べれる。

(G)サイコロ2個の目の合計が13以上の時ご飯が食べれる。

以上の7人でゲームをします。長生きした人が勝利。

これらの人は水は摂取し、ご飯を食べることとサイコロをふる動作以外は条件にない限りせず、最小限の動きで済ませるとする。間食は禁止です。イカサマも禁止です。自殺も禁止です。

全て体重70kg、体脂肪率20%、脂肪のカロリーを9kcal/gの人とし、絶食により運動強度が下がった結果として低下する基礎代謝量を1200kcal/日とする。ジョギングは30分で200kcal消費。

<考察>

(G)は早々に脱落、(F)のジョギングはかなり応えるのではないかと思います。他の人も2か月持てば上々だと思います。

<結果>

(A)サイコロ2個を食前にふり、ゾロ目が出たら700kcalのご飯が食べれる。

サイコロ2個がゾロ目になる確率→ $\frac{1}{6}$
つまり、2日に1回ご飯が食べれる。

何日生きれるかをa日とする。

$$\frac{70000(\text{g}) \times 0.2 \times 9(\text{kcal/g}) + \frac{a}{2} \times 700(\text{kcal})}{1200(\text{kcal/日})} = a$$

$$a = \frac{2520}{17}$$

$$a = 148.23 \dots$$

(A)約148日

(B)サイコロ2個を食前にふり、ゾロ目が出たら朝なら500kcal、昼は700kcal、夜は900kcalのご飯が食べれる。

ゾロ目の確率→ $\frac{1}{6}$

つまり、朝ごはん6日に1回、昼ごはん6日に1回、夜ごはん6日に1回食べれる。

何日生きれるかをb日とする。

$$\frac{70000 \times 0.2 \times 9 + \frac{b}{6} \cdot 500 + \frac{b}{6} \cdot 700 + \frac{b}{6} \cdot 900}{1200} = b$$
$$b = 148.23 \dots$$

(B)約148日

(C)サイコロ2個を食前にふり、ゾロ目の数×200のkcalのご飯が食べれる。

1のゾロ目の確率→ $\frac{1}{36}$

つまり、それぞれの数のゾロ目は12日に1回出る。

何日生きれるかをc日とする。

$$\frac{70000 \times 0.2 \times 9 + \frac{c}{12} (200 + 400 + 600 + 800 + 1000 + 1200)}{1200} = c$$
$$c = 148.23 \dots$$

(C)約148日

(D)常に3食食べれるが、サイコロ1個の出た目×100kcalしか食べれない。

2日ですべての数が出る。

何日生きれるかをd日とする。

$$\frac{70000 \times 0.2 \times 9 + \frac{d}{2} (100 + 200 + 300 + 400 + 500 + 600)}{1200} = d$$

$$d = \frac{1260}{1.5}$$

$$d = 840$$

(D)約840日

(E)サイコロ2個がどちらも1の時、1200kcalのご飯が食べれる。

サイコロ2個がどちらも1の確率→ $\frac{1}{36}$
つまり、12日に1回ご飯を食べれる。

何日生きれるかをe日とする。

$$\frac{70000 \times 0.2 \times 9 + \frac{e}{12} \cdot 1200}{1200} = e$$

$$e = \frac{1260}{11}$$

$$e = 114.5454...$$

(E)約114日

(F)サイコロが、ジョギング30分しなければ手に入れられない場所
にあり、食前にふるサイコロの目が偶数の時、700kcalのご飯が食
べれる。

サイコロが偶数の確率→ $\frac{1}{2}$
つまり、2日に1回3食食べれる。

何日生きれるかをf日とする。

$$\frac{70000 \times 0.2 \times 9 + \frac{f}{2} \cdot 2100 - 3 \times f \times 200}{1200} = f$$
$$f = \frac{1260}{7.5}$$
$$f = 168$$

(F)約168日

(G)サイコロ2個の目の合計が13以上の時ご飯が食べれる。

つまりご飯を食べれない。

何日生きれるかをg日とする。

$$\frac{70000 \times 0.2 \times 9}{1200} = g$$
$$g = 105$$

(G)約105日

(A)約148日(B)約148日(C)約148日(D)約840日(E)約114日

(F)約168日(G)約105日

(D)>(F)>(A)=(B)=(C)>(E)>(G)

(D)の圧倒的優勝 おめでとう

<参考>

<https://ja.wikipedia.org/wiki/餓死>

<https://www.s-re.jp/magazine/health/87/>

フェルマーの小定理の拡張

旭丘高等学校 2年3組18番 手塚亮佑

§1 動機と目的

数論の有名な定理にフェルマーの小定理がある。私はそれをさらに拡張できないかと考え、漸化式から導かれる数列にとの関係性を研究した。

§2 本題

1. フェルマーの小定理とは

フェルマーの小定理とは以下のようなものである。
 p を素数とし、 a を p と互いに素である整数とすると

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

が成り立つ。

ここで a^{p-1} を以下のように考える。

数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する。

$$a_1 = 1, a_{n+1} = aa_n$$

漸化式を解くと $a_n = a^{n-1}$ が分かるため

$a^{p-1} = a_p$ と書くことができる。

するとフェルマーの小定理は以下のように書き換えられる。

$p, a, \{a_n\}$ を上記のように定義したとき

$$a_p \equiv 1 \pmod{p}$$

が成り立つ。

2. フィボナッチ数列への拡張

ここで $\{a_n\}$ の漸化式を2項間から3項間に変化させて考える。まずはフィボナッチ数列の場合を考える。
 すなわち、数列 $\{a_n\}$ を以下のように定義する。

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

この時 a_p を素数 p で割ったときの余りを考える。

$\{a_n\}$ の一般項を求めると、

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) \quad \left(\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$$

$p \geq 3$ のときを考える。以下合同式では $(\text{mod } p)$ を省略する。

$$a_p = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^p - \beta^p)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left((\alpha - \beta)^p - \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} \alpha^k (-\beta)^{p-k} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left((\sqrt{5})^p - \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p}{k} (\alpha^k (-\beta)^{p-k} + \alpha^{p-k} (-\beta)^k) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left((\sqrt{5})^p - \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p}{k} (-\alpha\beta)^k ((-\beta)^{p-2k} + \alpha^{p-2k}) \right)$$

$$= (\sqrt{5})^{p-1} - \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p}{k} \left(\frac{\alpha^{p-2k} - \beta^{p-2k}}{\sqrt{5}} \right)$$

$$= (\sqrt{5})^{p-1} - \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p}{k} a_{p-2k}$$

$$\equiv 5^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p} \quad (\because \binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p} \quad (1 \leq k \leq p-1))$$

$p \neq 5$ の時

$$a_p \equiv 5^{\frac{p-1}{2}}$$

$$\equiv \left(\frac{5}{p} \right) \quad (\text{オイラー規準})$$

$$\equiv (-1)^{\frac{p-15-1}{2}} \left(\frac{p}{5} \right)$$

$$= \begin{cases} 1, & p \equiv 1, 4 \pmod{5} \\ -1, & p \equiv 2, 3 \pmod{5} \end{cases}$$

$p = 2$ のとき $a_2 = 1 \equiv -1 \pmod{2}$ より成り立つ。

$p = 5$ のとき $a_5 = 5 \equiv 0 \pmod{5}$ である。

以上より

$$a_p \equiv \begin{cases} 1, & p \equiv 1, 4 \pmod{5} \\ -1, & p \equiv 2, 3 \pmod{5} \\ 0, & p = 5 \end{cases}$$

が得られる。

3. 一般化した式への拡張 I

フィボナッチ数列の場合を拡張してより一般的な3項間漸化式の場合を考える。

数列 $\{a_n\}$ を以下のように定義する。

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = aa_{n+1} + ba_n$$

$$(a, b \in \mathbb{Z}, a^2 + 4b \neq 0)$$

この時 a_p を素数 p で割ったときの余りを考える。

$\{a_n\}$ の一般項を求めると、

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{D}}(\alpha^n - \beta^n)$$

$$(\alpha, \beta \text{は } \lambda^2 = a\lambda + b \text{の解}, D = (\alpha - \beta)^2)$$

$p \geq 3$ の時を考える。

$$a_p = \frac{1}{\sqrt{D}}(\alpha^p - \beta^p)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{D}} \left((\sqrt{D})^p - \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} \alpha^k (-\beta)^{p-k} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{D}} \left((\sqrt{D})^p - \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p}{k} (\alpha^k (-\beta)^{p-k} + \alpha^{p-k} (-\beta)^k) \right) \quad \text{よって}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{D}} \left((\sqrt{D})^p - \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p}{k} (-\alpha\beta)^k ((-\beta)^{p-2k} + \alpha^{p-2k}) \right)$$

$$= (\sqrt{D})^{p-1} - \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p}{k} \left(\frac{\alpha^{p-2k} - \beta^{p-2k}}{\sqrt{D}} \right)$$

$$= (\sqrt{D})^{p-1} - \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p}{k} a_{p-2k}$$

$$\equiv D^{\frac{p-1}{2}} \quad (\because \binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p} \quad (1 \leq k \leq p-1))$$

p が D の約数のとき $a_p \equiv 0$ となる。

そうでないとき

$$a_p \equiv D^{\frac{p-1}{2}}$$

$$\equiv \left(\frac{D}{p}\right) \quad (\text{オイラー規準})$$

$p = 2$ のとき $a_2 = a \equiv a^2 = D - 4b \equiv D \pmod{2}$ となりこれらを満たす。

以上より

$$a_p \equiv \begin{cases} \left(\frac{D}{p}\right) & (p \nmid D) \\ 0 & (p \mid D) \end{cases}$$

が得られる。

4. 一般化した式への拡張 II

初期条件を変えた以下の数列に対しても同様に考える。

数列 $\{a_n\}$ を以下のように定義する。

$$a_0 = 2, a_1 = a, a_{n+2} = aa_{n+1} + ba_n$$

$$(a, b \in \mathbb{Z}, a^2 + 4b \neq 0)$$

この時 a_p を素数 p で割ったときの余りを考える。

$\{a_n\}$ の一般項を求めると、

$$a_n = \alpha^n + \beta^n$$

$$(\alpha, \beta \text{は } \lambda^2 = a\lambda + b \text{の解})$$

$$a_n = \alpha^n + \beta^n$$

$$= (\alpha + \beta)^p - \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} \alpha^k \beta^{p-k}$$

$$= a^p - p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\binom{p}{k}}{p} \alpha^k \beta^{p-k}$$

ここで $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{\binom{p}{k}}{p} \alpha^k \beta^{p-k}$ は α と β の対称式であり、整数であるため

$$a_n = a^p - p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\binom{p}{k}}{p} \alpha^k \beta^{p-k}$$

$$\equiv a^p$$

$$\equiv \begin{cases} a & (p \nmid a) \\ 0 & (p \mid a) \end{cases} \quad (\text{フェルマーの小定理より})$$

が得られる。

5.4 項間の場合

4項間漸化式の場合では、以下のような数列についても同様に考えられる。

数列 $\{a_n\}$ を以下のように定義する。

$$a_0 = 2, a_1 = a, a_2 = a^2 + 2b,$$

$$a_{n+3} = aa_{n+2} + ba_1 + ca_0$$

$$(a, b, c \in \mathbb{Z}, \lambda^3 = a\lambda^2 + b\lambda + c \text{ は重解を持たない})$$

この時 a_p を素数 p で割ったときの余りを考える。

$\{a_n\}$ の一般項を求めると、

$$a_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$$

$$(\alpha, \beta, \gamma \text{ は } \lambda^3 = a\lambda^2 + b\lambda + c \text{ の解})$$

よって

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha^n + \beta^n + \gamma^n \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)^n - \sum_{\substack{0 \leq i, j, k < n \\ i+j+k=n}} \frac{n!}{i!j!k!} \alpha^i \beta^j \gamma^k \\ &= a^n - p \sum_{\substack{0 \leq i, j, k < p \\ i+j+k=p}} \frac{(p-1)!}{i!j!k!} \alpha^i \beta^j \gamma^k \end{aligned}$$

ここで $\sum_{\substack{0 \leq i, j, k < p \\ i+j+k=p}} \frac{(p-1)!}{i!j!k!} \alpha^i \beta^j \gamma^k$ は α, β, γ の対称式であり、

整数であるため

$$\begin{aligned} a_n &= a^n - p \sum_{\substack{0 \leq i, j, k < p \\ i+j+k=p}} \frac{(p-1)!}{i!j!k!} \alpha^i \beta^j \gamma^k \\ &\equiv a^n \end{aligned}$$

$$\equiv \begin{cases} a & (p \mid a) \\ 0 & (p \nmid a) \end{cases} \quad (\text{フェルマーの小定理より})$$

が得られる。

6.5 項間以上の場合

これまでと同様に、初期条件をうまく設定すれば、同様の式が得られるのではないかと考えられる。

§3 結果・今後の展望

二項定理やオイラー規準を駆使することで、フェルマーの小定理を拡張したような式が得られた。より一

般的な漸化式(初期条件、 n 項間)の場合でも代数体上の剰余群として考えることにより、得られるのではないかと思う。

§4 参考文献

『高校数学の美しい物語』 <http://mathtrain.jp>

<はじめに>

今回、私は新型コロナウイルスに関するニュースにおいてその爆発的な感染者数の増加のグラフを見た際に、これを式で表しから今後の感染者数の予測をすることができなければ興味をもたない。そのため、マルサスモデルやロジスティックモデルを用いて考えてみることにした。

1. 研究の目的

- ・ コロナ感染者数の今後の予測をする。

2. 方法

- ・ マルサスモデル^{*1}、ロジスティックモデル^{*2}を用いて現在までの新型コロナウイルス感染者数をグラフで表し、そこから今後の感染者数の予測をする。

*1. マルサスモデル: ある生物の個体数、又は個体群サイズの指数関数的な増加あるいは減少を記述する数理モデル。

ここでは、ある生物の個体数の増加速度が個体数自体に比例するものとする。(Weblio辞書)

*2. ロジスティックモデル: 1種の個体群の時間変化を記述したモデル。

個体数の増加率が個体数に比例し、ある環境下において持続的に維持できる生物の最大個体数を上限として増加率が減少する。(goo辞書)

↑
* マルサスモデルは生物の増加率は生物個体数そのものに比例する
↳ 無限に個体数は増加していく。

増加率は常に一定

↓
* ロジスティックモデルはその環境の中で維持できる個体数を上限として増加率が減少する。

増加率を調節

↳ マルサスモデルに比べてより現実的に表すことができると思われる。(しかし今回はマルサスモデルでも表し、比較を行う)

3. マルサスモデル

- ・ 感染者数 = y (人) ・ 時間 = t (日)

↳ ここでは、累計の感染者数(=現在感染している人の数+回復した人の数+死者数)を考えるとにする。

$$(\text{単位時間あたりの感染者増加量}) = (\text{感染者増加率}) \times (\text{感染者数})$$

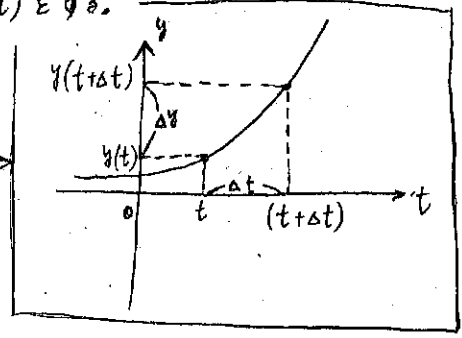
∴ 感染者数 y を時間 t の関数として $y = y(t)$ とする。

時間 t から $t + \Delta t$ まで経過したときの感染者の増加率は

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \quad \text{①}$$

と表すことができる。

(t から $t + \Delta t$ までの増加率を表している)



① の増加率を「人あたり」に直すと

$$a(t) = \frac{\Delta y}{\Delta t} \times \frac{1}{y(t)} = \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{y(t) \Delta t} \quad \text{②}$$

※ (感) = 感染者数

(※ ∴ どの時点においても Δt 経過する間の増加率が一定の値 $a(t) = \alpha$ とする)

$$\begin{aligned} (\Delta t \text{ 経過後の感}) &= (\Delta t \text{ 経過前の感}) + (\Delta t \text{ 経過前の感}) \times (\text{増加率}) \times (\Delta t) \\ &= y(t) + y(t) \cdot a(t) \cdot \Delta t = (1 + a \Delta t) \cdot y(t) \end{aligned} \quad \text{とある}$$

∴ Δt での平均増加率 $a(t)$ の代わりに $\Delta t \rightarrow 0$ とした瞬間の変化率を考える。

(自然は変化しているため、時間を区切って、 Δt は不自然) $\hookrightarrow k$ とする。

②より

$$k = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{y(t) \Delta t} = \frac{1}{y(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

Δt のときの感染者増加率

$$= \frac{1}{y(t)} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\begin{aligned} \therefore k &= \frac{1}{y(t)} \cdot \frac{dy}{dt} \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} &= ky \quad \text{③} \end{aligned}$$

(これを解いて y を求めることができれば、感染者数の時間変化が分かる。)

③は変数分離形の微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

それぞれの関数を積分することで解ける

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dt \cdot y} = k$$

積分公式

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int k dt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| + A$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = kt + c \quad (c = \text{任意の定数})$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{kt+c}$$

$$\Leftrightarrow y = \pm e^{kt+c}$$

$$\therefore y = Ae^{kt}$$

($A = \pm e^c = \text{任意の定数}$)

自然対数 = ネイピア数 e を底とする対数
($\ln X + \log_e X, \log X$ と表す)
*3 ネイピア数: 数学定数の1つ

$t = 0$ としたときは $y(0) = A \cdot e^0 = A \cdot 1 = A$
 $\therefore A$ は y の $t = 0$ のときの初期値 y_0 である。

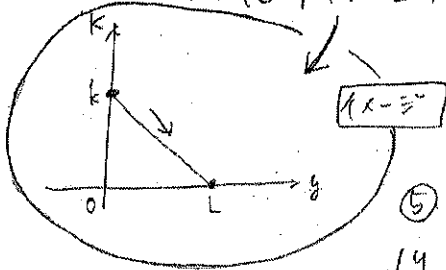
よって
感染者増加率 k が一定であるときの感染者 y の時間変化を表す式
 $y(t) = y_0 e^{kt} \quad \text{④}$
が得られた。

(次のページに続く)

4. ロジスティックモデル

全体の人口 = L (人) $y = y(t)$ = t 日目における感染者数

※ ロジスティックモデルは増加の抑制を加えた数理モデルである。今回は、感染者数が0のときは k , 感染者が L のとき (= 全員が感染) は 0 となるような比例係数 k を考える。



左図のように考えると k は y を変数として傾き $-\frac{k}{L}$, 切片 k の直線のため $K = -\frac{k}{L}y + k = k\left(1 - \frac{y}{L}\right)$ と表せる。

⑤ を比例係数として y の変化率 (= $\frac{dy}{dt}$) が y に比例すると考えると、
 $\frac{dy}{dt} = k\left(1 - \frac{y}{L}\right)y$ ⑥ が得られる。これをロジスティック方程式という。

⑥ を解く。 $\frac{dy}{dt} = k\left(1 - \frac{y}{L}\right)y = \frac{k}{L}y(L-y) \quad \therefore \frac{dy}{dt} \times \frac{L}{y(L-y)} = k$ (計算の都合上の変形)

両辺を積分すると、 $\int \frac{L}{y(L-y)} dy = \int k dt$

$\Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{L-y}\right) dy = kt + c$ (c = 任意の定数)
部分分数分解

(左辺) = $\log|y| - \log|L-y| = -\log\left|\frac{L-y}{y}\right|$

$\therefore -\log\left|\frac{L-y}{y}\right| = kt + c$

$\Leftrightarrow \left|\frac{L-y}{y}\right| = e^{-kt-c}$

$\Leftrightarrow \frac{L-y}{y} = \pm e^{-kt-c}$

$\Leftrightarrow \frac{L-y}{y} = \pm e^{-c} \cdot e^{-kt}$

$\Leftrightarrow \frac{L-y}{y} = A e^{-kt}$ (A = 任意の定数)

$\Leftrightarrow \frac{L}{y} - 1 = A e^{-kt}$

$\Leftrightarrow \frac{L}{y} = 1 + A e^{-kt}$

\Rightarrow $y(0) = y_0$ より、

$$y(0) = y_0 = \frac{L}{1 + A e^0}$$

$$\therefore A = \frac{L - y_0}{y_0} \quad (\because e^0 = 1)$$

$L = P \rightarrow$

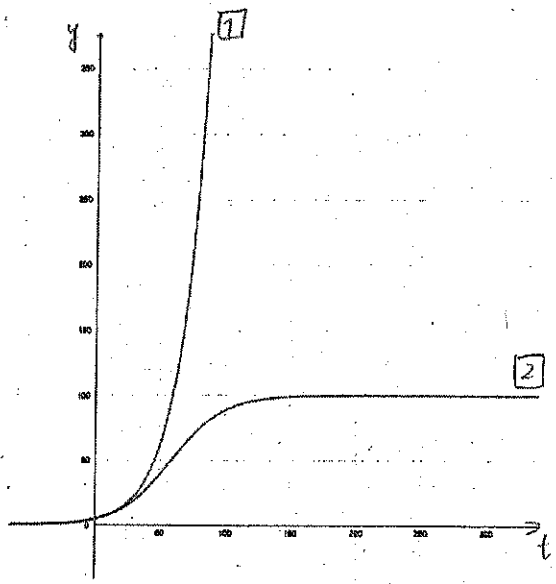
$$y = \frac{y_0 L}{y_0 + (L - y_0) e^{-kt}} \quad \text{⑦}$$

が求められる。

(= ロジスティック関数)

5. マルサスモデルとロジスティックモデルの比較

まず、ここではマルサスモデルとロジスティックモデルでそれぞれ得られた関数をグラフにして比較を行う。



ここでは根拠形の比較を行うことが目的のため、感染増加率は適当に設定した。(感染増加率 = 0.05)

また、今回は2つのグラフを比較しやすくするために

・初期感染者数 = 5人 (= y_0)

・全体の人口 = 100人 (= L) と

簡単な値を適当に設定した。

左図から、増加率が常に一定となる①と増加率を調節する②では y の値に大きな差が出ることは見てとれる。このあたりは、より現実的に表すことができればと思われるロジスティックモデルを活用していく。

① マルサスモデル $y(t) = y_0 e^{kt}$ ($y_0 = 5, k = 0.05$)

$$y(t) = 5 e^{0.05t} \quad \text{①}$$

② ロジスティックモデル $y(t) = \frac{y_0 L}{y_0 + (L - y_0) e^{-kt}}$ ($y_0 = 5, k = 0.05, L = 100$)

$$y(t) = \frac{5 \times 100}{5 + (100 - 5) e^{-0.05t}} \quad \text{②}$$

6. ロジスティックモデルを使った今後の感染者数の予測

まず、感染増加率 k を適当に変えてそれぞれグラフを書く。その後、現時点で最も実際の感染者数と値に近いものの k を採用して今後の感染者数の予測をたてる。今回は日本の感染者数について考える。 y_0 (= 初期感染者数) は感染が自立し始めた3月1日時点での感染者数 (= 256人) を採用した。

・ $y_0 = 256$ ・ $k = 0.05$ ・ $L = 126004000$

↑
日本の人口 (令和2年2/1時点)
1億2600万4千人

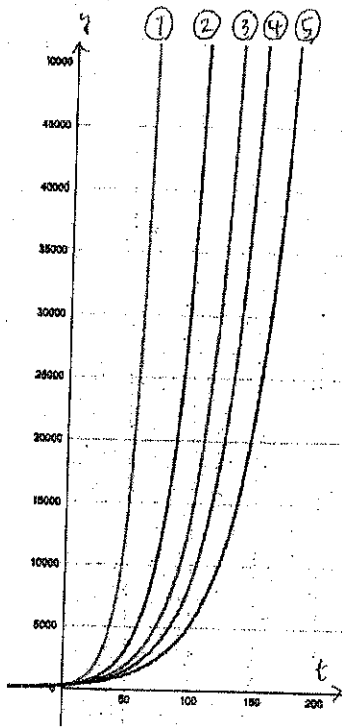


図 1

① $k = 0.08$

$$y = \frac{256 \times 126004000}{256 + (126004000 - 256)e^{-0.08x}}$$

② $k = 0.05$

$$y = \frac{256 \times 126004000}{256 + (126004000 - 256)e^{-0.05x}}$$

$$\left(= \frac{32257024000}{256 + 126003744e^{-0.05x}} \right)$$

③ $k = 0.04$

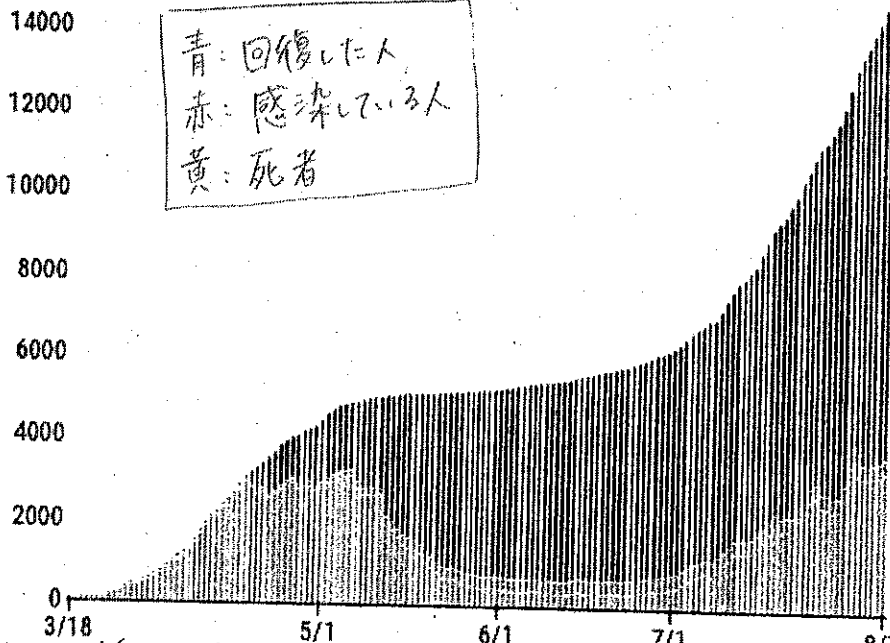
$$y = \frac{32257024000}{256 + 126003744e^{-0.04x}}$$

④ $k = 0.035$

$$y = \frac{32257024000}{256 + 126003744e^{-0.035x}}$$

⑤ $k = 0.03$

$$y = \frac{32257024000}{256 + 126003744e^{-0.03x}}$$



青: 回復した人
赤: 感染している人
黄: 死者

(チャートで見る日本の感染状況 新型コロナウイルス 日本経済新聞)

左図は 3/18 ~ 8/7 までの日本の感染者数を表したものである。ロジスティックモデルで表したグラフのようにはならずたため、ここでは現在 (8/9) 時点での感染者数 48909 人に最も近いグラフの k を採用する。上のグラフは 3月1日 を $t=0$ での 0 と考えているため、8/9 は $t = 162$ とする。

図 2

• 8月9日での感染者数は48909(人)である。

前ページの図7において $t=162$ のとき y が48909に近い値をもつのは

$k=0.035$ の曲線④と $k=0.03$ の曲線⑤である。

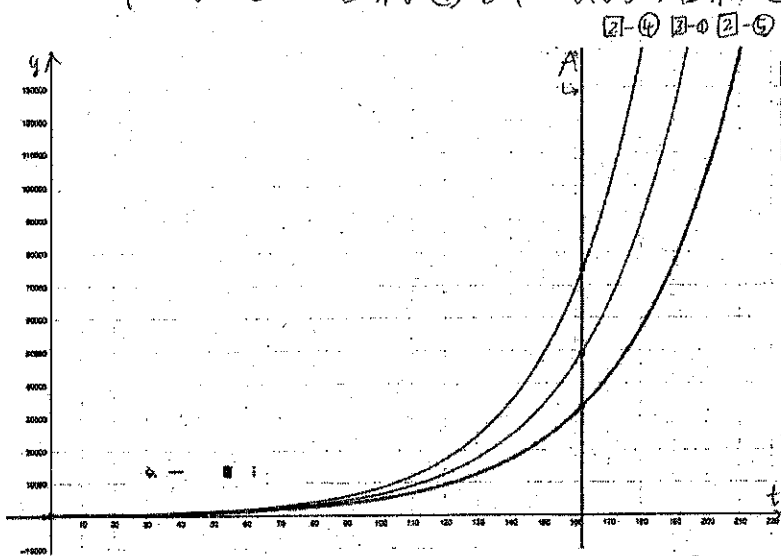


図3

左の図3では図2の④と⑤の他に $k=0.0325$ の曲線を加えた。直線Aは $t=162$ (=8月9日)を示している。

(2-④) → 図2の曲線④
(3-①) → $k=0.0325$ の曲線

図3において $t=162$ のとき最も y が48909に近い値をとるのは (3)-①の曲線である。

ニから、今回のロジスティックモデルにおける感染増加率として適当だと考えられるのは $k=0.0325$ である。

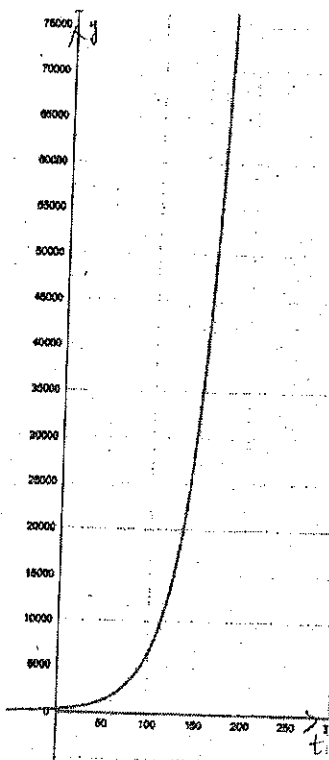


図4

左の図4は $k=0.0325$ の曲線である。

左のグラフから、今後私たちが新型コロナウイルス感染症に対して何も対策をとらば、又は対策を怠るとこれからも感染者は増加し続けていくことがわかる。

7. 考察

今回ロジスティックモデルで求めた図4の曲線と実際の日本の累計感染者数を表す図2を見比べてみると、図2では5月初旬から7月までにかけて感染者数の増加がゆるやかになっていることが分かる。(図4と比較)これは、今回のモデルでは考慮することが

できなかったものの、すなわち感染対策による影響ではないかと考えられる。このことから、感染対策はある程度有効であるといえるのではないだろうか。

<参考>

基礎からの数学入門 ロジスティック方程式とは

<https://math.keicode.com/calculus/differential-equations-logistic-equation.php>

基礎からの数学入門 人口増加の微分方程式 (マルサスモデル)

<https://math.keicode.com/calculus/differential-equations-population-growth.php>

特設サイト 新型コロナウイルス

<https://www3.nhk.or.jp/news/special/coronavirus/data-all/>

総務省統計局 統計局ホームページ 人口推計

<https://www.stat.go.jp/data/jinsui/new.html>

高校数学の美しい物語 積分公式一覧

https://mathtrain.jp/integral_matome

変数分離形 微分方程式の解き方

https://www.geisya.or.jp/~mwm48961/kou3/differ_eq1.htm

wired 指数関数的に拡散する新型コロナウイルスの対策として、「カーブの平坦化」こそ重要である数学的な根拠

<https://wired.jp/2020/04/01/the-promising-math-behind-flattening-the-curve/>

ナッシュ均衡から考えるマスク買い占め

20425 鵜飼麻矢

ゲーム理論とは、ある種的意思決定を人間が行った結果、何が起こるかを予測する理論である。この理論を使い、コロナウイルス渦で人々が取った行動の分析、また、今後私たちが取るべき行動の考察をしていく。

1. 研究の背景と目的

コロナウイルスが日本でも猛威をふるうようになり、連日テレビや新聞で普段では想像もつかないようなニュースが報道されている。未曾有の事態であるからこそ過去の乏しい事例に頼り切りになるのではなく、論理的な思考に基づく分析・予測をし、対策を取ることが必要だと考えた。

2-1. ゲーム理論の概要

- ・ゲーム理論は応用数学に分類される。
- ・じゃんけんのように、「自分は相手の出方を予想して意思決定するし、相手も自分の出方を予想して意思決定する」状況を戦略的状況という。ゲーム理論とは、戦略的状況における意思決定の結果を予測する理論である。
- ・ゲーム理論で最も基本的な概念がナッシュ均衡
- …戦略的状況での行動 = 相手が何をするかに対するベストな行動になる場合のこと

例：囚人のジレンマ

同一の事件で逮捕された囚人 A と囚人 B がそれぞれ別室で取り調べを受けている。一方が黙秘し、もう一方が自白した場合、前者は懲役 5 年、後者は無罪放免となる。2 人とも黙秘した場合は懲役 2 年、2 人とも自白した場合は懲役 4 年となる。

囚人 A と囚人 B はどのような選択をするだろうか？（両者とも刑期の長さのみを考慮するものとする。）

A \ B	自白	黙秘
自白	(4, 4)	(0, 5)
黙秘	(5, 0)	(2, 2)

囚人 A、B の選択肢別の刑期の長さは、それぞれ左の表のようになる。

囚人 B が自白を選ぶと仮定すると、囚人 A には「自白を選んで懲役 4 年」か「黙秘を選んで懲役 5 年」の 2 つの選択肢がある。この場合は、自白を選んだ方がよい。

囚人 B が黙秘を選ぶと仮定すると、囚人 A には「自白を選んで懲役なし」か「黙秘を選んで懲役 2 年」の 2 つの選択肢がある。この場合も、自白を選んだほうがよい。

つまり囚人 A にとっては、囚人 B が自白する・しないに関わらず自白した方がよい。同様のことが囚人 B にも言えるので、「2 人とも自白する」という結果が予測される。

この結果はこのゲームにおけるナッシュ均衡である。なぜなら、2 人とも自白する場合、どちらの立場であっても「自分の選択肢のみを変えることでより有利になることがない」からだ。すなわち、これは相手が何をするかに対するベストな行動であると言える。

2-2. ナッシュ均衡とマスク買い占め

日本でコロナウイルスが広がり始めた 2 月から 3 月にかけて、全国でマスクの買い占めによる品薄状態が相次いだ。政府から買い占めを控えるようにという要請があったにも関わらず、人々が買い占めを続けたのはなぜなのだろうか？

2 人の消費者 A (自分)、B (自分以外の平均的な消費者) を考える。各自が持つ選択肢は「慌てない」と「急いで買う」の 2 つである。

起こりうる 4 つの結果に応じて得られる満足度を下のように決める。

- 2 人とも「あわてない」・・・手元にある量は少ないが、在庫が豊富にあり、自分が買いたいタイミングで商品が買える → ともに満足度は 1
- 1 人だけ「急いで買う」・・・買ったほうは手元にたくさんある上に在庫もあるので満足度 2、慌てず買いに行かなかったほうは自分だけ手元にマスクがないという不安から満足度 - 1
- 2 人とも「急いで買う」・・・手元にはあるが品薄状態になり、欲しいときに商品を買えないリスク → ともに満足度は 0

A \ B	慌てない	急いで買う
慌てない	(1, 1)	(-1, 2)
急いで買う	(2, -1)	(0, 0)

それぞれの場合の満足度は左の表のようになる。

消費者 B が「慌てない」を選ぶと仮定すると、消費者 A は「慌てないで満足度 1」か「急いで買って満足度 2」の 2 つの選択肢を持つ。この場合、「急いで買う」を選択したほうがよい。

消費者Bが「急いで買う」を選ぶと仮定すると、消費者Aは「慌てないで満足度-1」か「急いで買って満足度0」の2つの選択肢を持つ。この場合も「急いで買う」を選択したほうがよい。

同様のことが消費者Bにも言えるので、ナッシュ均衡は「2人とも急いで買う」であると言える。

3. 結果・考察

「マスク買い占めゲーム」の結果は「両者とも急いで買う」となった。

ナッシュ均衡のミソは「自分は相手の出方を予想して意思決定するし、相手も自分の出方を予想して意思決定する」状況における結果だということである。マスク買い占めの場合、各消費者が他の消費者の行動を予想しただけでなく、実際にニュースや新聞で品薄状態を目にしたことでさらに買い占めに拍車がかかったのではないだろうか。

ナッシュ均衡は「その状況下でベストな行動」ではなく「相手が何をするかに対してベストな行動」を示すものである。このマスク買い占めゲームにおけるベストな行動というのは、A、Bの満足度がバランス良く高い「両者とも慌てない」である。これは上の表のように起こりうる結果を俯瞰して見てみるとおのずと見えてくることだ。したがって、自分が相手の出方を予想して意思決定するだけでなく、その意思決定によってどんな結果になるかまで考えて行動を起こすべきであると考ええる。

4. 参考文献

- ・鎌田雄一郎. ゲーム理論入門の入門. 新赤版, 岩波書店, 2019.
- ・安田洋祐. “買い占めに走る消費者は「間抜け」なのか?”. 日経ビジネス. <https://business.nikkei.com/atcl/seminar/19/00030/030900081/?P=3>
(参照 2020-08-03)
- ・白壁達久. “まるでオイルショック、新型コロナによる「買い占め」はトイレ紙にも”. 日経ビジネス. <https://business.nikkei.com/atcl/gen/19/00002/022801115/>
(参照 2020-08-03)

電車の運行の解析

～特急列車を走らせるには？～

伊藤 綾花

1. はじめに

電車は時刻表通りにきっちり各駅に停車する。(天候不良やトラブルによる遅延を除いて。)時間通りの運行には、速度や加減速度、停車時間などがどのように関係しているのかと思い、電車の運行を数学的に、Excelで解析してみることにした。

また、なぜ小牧線には特急列車がないのか。名古屋鉄道の他の路線には特急や急行があるのに、小牧線にはない。特急列車があればもう少し長く寝てられる。そんな疑問から、特急列車の運行を可能にするためにはどのようなダイヤグラムを作ればいいのかについても探っていく。

*注 ダイヤグラム(列車運行表)

公共交通機関の全列車の運転が一目でわかるように書き表した図表。縦軸駅名、横軸時刻を表す。列車番号、行き違い、待避、通過、停車などの運行状況がつかえる。

2. 調べる方法

前提

- ・加減速度はすべての駅間で等しくなっている。
- ・加速→等速→減速の順で速度は変化していく。
- ・普段、私が通学で使っている、小牧の平安通間を考える。

目的①

：時刻表通りの運行と速度、加減速度、停車時間の関わりを調べる。

方法

実際の小牧の平安通間の時刻表、駅間距離から、時間通りに到着するためには、それぞれの駅間で、どのくらいの最高速度が出ているかを考える。

目的②

：特急列車が普通列車よりも遅くに駅を出発し、普通列車よりも早く終点に着くようなダイヤグラムを考える。

方法

- ① 普通列車のダイヤグラムを作る。
- ② ダイヤグラムから、目的を満たすような特急列車の出発時間、ダイヤグラムを考える。

3. 最高速度を調べる

★小牧-小牧口間の等速度区間最高速度を調べる。

① 区間平均速度を求める。

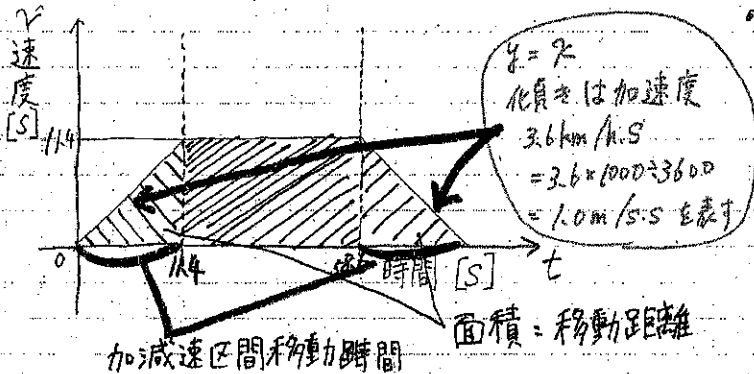
速度 = 距離 ÷ 時間

$$V = 0.8 \text{ km} \div (0.01 \times 10 = \frac{70}{3600} \text{ 時間})$$

$$= 0.8 \div \frac{70}{3600}$$

$$= 41.14 = 41.1 \text{ km/h}$$

② 加減速区間移動時間 距離 求める。

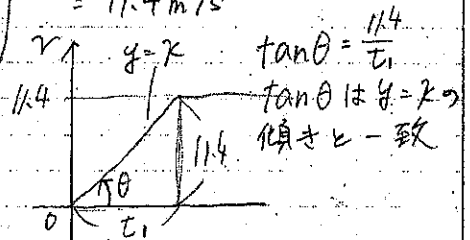


・加減速区間移動時間 t を求める

$$41.1 \text{ km/h}$$

$$= 41.1 \times 1000 \div 3600$$

$$= 11.4 \text{ m/s}$$



・加減速区間移動距離 面積を求める。

$$22.8 \times 11.4 \times \frac{1}{2} = 130.6 \text{ m}$$

$$\frac{11.4}{t_1} = 1 \quad t_1 = 11.4$$

加減速あわせて $t = 22.8 \text{ s}$

③ 等速度区間最高速度を求める。

等速度区間の距離: $0.8 \text{ km} = 800 \text{ m}$ $800 \text{ m} - 130.6 \text{ m} = 669.4 \text{ m}$

区間を 70 s で通過するには、等速度区間、 $70 \text{ s} - 22.8 \text{ s} = 47.2 \text{ s}$ で通過

よって、求める値は、 $669.4 \div 47.2 = 14.18 \text{ m/s}$ $14.18 \text{ m/s} \times 3600 \div 1000 = 51.1 \text{ km/h}$

駅名	到着	出発	区間距離 (km)	区間所要時間	停車時間	区間平均速度 (km/h)	加減速区間移動時間 (s)	加減速区間移動距離 (m)	等速度区間移動距離 (m)	等速度区間平均速度 (km/h)
小牧		7:22:30	0.8	001:10		41.1	22.9	130.6	669.4	51.1
小牧口	7:23:40	7:24:00	1.2	001:30	000:20	48.0	26.7	177.8	1022.2	58.1
間内	7:25:30	7:25:50	0.9	001:10	000:20	46	26	165.3	734.7	59.7
牛山	7:27:00	7:27:25			000:25					

上記の①②③の計算をExcelで式を入力し作成した。
 停車時間や小牧駅出発時刻、をかえたとき、等速度区間最高速度を
 変化させることが出来るようにした。

→ 停車時間や加速度を変化させると、等速度区間最高速度は
 どうなるのか？

★ 停車時間を変化させたとき

駅名	到着	出発	区間距離 (km)	区間所要時間	停車時間	区間平均速度	加減速区間	加減速区間	等速度区間	等速度区間
						km/h (加速区間の平均)	移動時間(s) 加速区間			
小牧		7:22:30	0.8	0:01:10	0:00:20	41.1	22.9	130.6	669.4	51.1
小牧口	7:23:40	7:24:10			0:01:30					
間内	7:25:30	7:25:50	1.2	0:01:30	0:01:20	54.0	30.0	225.0	975.0	70.2
			0.9		0:01:10	46	26	165.3	734.7	59.7
牛山	7:27:00	7:27:25			0:00:25					

ex) 小牧口の停車時間を 20秒 → 30秒に変更
 小牧口-間内間の移動は、時刻表通りにするために、速度を上げなければなりません。

○ここからわかること。

- 朝や帰りのラッシュなどで、降車、乗車する人が多く、停車時間が長くなると、速度を上げて時刻表通りに次の駅に到着するようにしている。
- かけこみ乗車する人がいて、停車時間が長くなると、運転手は速度を上げなければならぬので、かけこみ乗車は運転手からすると、非常に迷惑。

★ 加速度を変化させたとき

駅名	到着	出発	区間距離 (km)	区間所要時間	停車時間	区間平均速度	加減速区間	加減速区間	等速度区間	等速度区間
						km/h (加速区間の平均)	移動時間(s) 加速区間			
小牧		7:22:30	0.8	0:01:10		41.1	20	235.1	564.9	70.5
小牧口	7:23:40	7:24:00					0:00:20			
間内	7:25:30	7:25:50	1.2	0:01:30		48.0	48.0	320.0	880.0	75.4
			0.9			0:01:10	46	48	297.6	602.4
牛山	7:27:00	7:27:25			0:00:25					

○ここからわかること。

- 加速度が小さくなると、一定の速さになるまで時間がかかる分、時刻通りに次の駅に到着するには、より速度が大きくなければなりません。
- 加速度を変更したとき、Excel上では上のような計算結果が出たが、加減速度区間移動時間の矛盾点が出てきたので、このExcel計算では加速度の変更はできないとわかった。

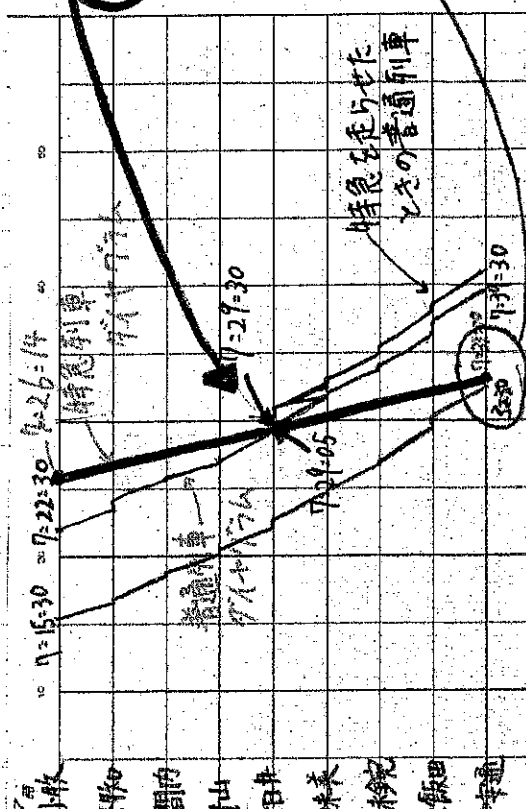
解析結果

- 時刻表通りの運行のために、運転手は常に速度を考えながら走行しなければなりません。
- 停車時間が少し変化しただけで、速度が細かく変化していくので、朝や帰りのラッシュ時、かけこみ乗車で停車時間は変化しやすい。
- 加速度を含めて、電車の速度を考えると、計算が複雑になり難しかった。

小牧站平安通まで直行の

4. 特急列車をのこるには? Excelの資料を貼るために横向きにした。

駅名	距離 (km)	駅間距離 (km)	特急列車の速度 (km/h)	普通列車の速度 (km/h)	特急列車の時刻 (分)	普通列車の時刻 (分)
小牧	0.8	0.8	100	60	7:22:30	7:26:14
小牧口	1.2	0.4	100	60	7:27:30	7:31:14
朝野	0.9	0.3	100	60	7:28:30	7:32:14
牛山	1.5	0.6	100	60	7:29:30	7:33:14
春日井	1.7	0.2	100	60	7:30:30	7:34:14
味美	1.4	0.3	100	60	7:31:30	7:35:14
津路	2.3	0.9	100	60	7:32:30	7:36:14
土師田	0.8	0.1	100	60	7:33:30	7:37:14
平安通					7:34:30	7:38:14



停止時間2分だけと
衝突の危険がある
ので2分とする

特急の10分以上前に
出発した普通列車
と同じくらくらく

特急列車が
止まったときの
普通列車

※ 夕日や夕日は何本もの電車の運行を表すものがあるが、小牧から平安通のみの運行を考慮する。

★ 春日井駅で停車しているときに横を通過するような速さ100 km/s (標準的の特急列車の速さ) の列車を考慮する。

加速度は $36 \text{ km/h/s} = 1 \text{ m/s}^2$ とする。

小牧から春日井間の距離 = $0.8 + 1.2 + 0.9 + 1.5 = 4.4 \text{ km} = 4400 \text{ m}$

また、 $100 \text{ km/s} = 100 \times 1000 \div 3600 = 27.77 \text{ m/s} = 28 \text{ m/s}$

小牧から春日井間は、
 $V = at$ より $t = \frac{28}{1} = 28 \text{ s}$

等速区間のときかかる時間は、
 $\{4400 \text{ m} - (\text{加速するのに進んだ距離})\} \div 28 \text{ m/s} = 4009 \div 28 = 143 \text{ s}$ がかかる。

物理の公式

$x = \frac{1}{2}at^2$
 $\frac{1}{2} \times 1 \times 28^2 = 392 \text{ m}$

① + ② より 特急列車は小牧から春日井間で171s がかかるから、普通列車は春日井駅で停車して115s 横を通過するときは、
 $171 + 115 = 286 \text{ s} = 4 \text{ 分 } 46 \text{ 秒}$

②より 小牧から春日井間で171s がかかるから、普通列車は春日井駅で停車して115s 横を通過するときは、
 $171 + 115 = 286 \text{ s} = 4 \text{ 分 } 46 \text{ 秒}$

①
②
③
④
⑤
⑥
⑦
⑧
⑨
⑩
⑪
⑫
⑬
⑭
⑮
⑯
⑰
⑱
⑲
⑳
㉑
㉒
㉓
㉔
㉕
㉖
㉗
㉘
㉙
㉚
㉛
㉜
㉝
㉞
㉟
㊱
㊲
㊳
㊴
㊵
㊶
㊷
㊸
㊹
㊺
㊻
㊼
㊽
㊾
㊿

考察

- ・特急列車より早く駅を出発し、普通列車より早く到着する。
- ・終点の形状に合わせたダイヤは、計算上では作ることもできる。
- ・線路の形状に合わせて、時速100kmでは脱線する可能性もある。
- ・細かい調整は必要である。
- ・今乗っている電車よりも遅い時間の電車が早く着くので、朝あわてて家を出る必要がなくなる。

5. 感想

今回の研究を通して、電車が時刻表通りにきっちり運行されているのは、運転手が速度を細かく調節しているからだと理解できた。また、停車時間が少しでも変化すると、時間通りに運行するには速度をいかに守らなければならないのか、かけこみ乗車はおやめくださいのアナウンスのあたりまえだが、きちんと計算された速度で運行されているからであって、日本の電車のすばらしさを感じた。

特急列車を小牧線に走らせることは計算上では可能であるとわかったが、あまり速度を出しすぎると脱線する可能性があるため細かい速度の調整が必要だ。だが、いつも朝乗っている電車よりも早い時間に朝、10分ほど長く寝ていられるのでもいいなと思った。

数学は難しく、公式などが多くて使いこなすのが大変だが、身近なことに数学を応用できるのはとても楽しいと感じた。これから身近なものの数学を活用してみたい。

6. 出典

<https://www.mintetsu.or.jp/>一般社団法人日本民営鉄道協会 アクセス日 2020年8月1日

<https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%90%8D%E9%89%84%E5%B0%8F%E7%89%A7%E7%B7%9A>
ウィキペディア アクセス日 2020年8月2日

駅番号	駅名	駅間 キロ	所要 キロ	路線	所属	所在地
名古屋地下鉄上飯田線平塚駅まで延伸路線						
KM13	上飯田駅	-	0.0	名古屋地下鉄：深井上飯田線 (K01)	名古屋	名古屋市
KM12	新栄駅	2.3	2.3			名古屋市
KM11	本郷駅	1.4	3.7			名古屋市
KM10	春日井駅	1.7	5.4			名古屋市
KM09	牛山駅	1.8	6.9			名古屋市
KM08	堀内駅	0.9	7.8			名古屋市
KM07	小牧口駅	1.2	9.0			名古屋市
KM06	小牧駅	0.8	9.8			名古屋市
KM05	小牧南駅	1.5	11.3			小牧市
KM04	桂田駅	1.1	12.4			小牧市
KM03	田原神立駅	0.7	13.3			小牧市
KM02	桑田駅	1.6	14.9			小牧市
KM01	羽黒駅	2.3	17.2			小牧市
	五ヶ所川橋	-	(18.9)			六日市
TY15	丸山駅	3.4	20.6	名古屋鉄道：名古屋線・豊田線	A	六日市

↑ウィキペディアから
参考資料として活用
駅間距離が書いてあります。

放物線で反射する光線

2年5組17番 三木 淳

1. 動機

NHKの「大科学実験」という番組の「みんなこみに集まってくる」で、2mのパラボラに100個のボールを落とし、一か所(焦点)に集まる様子を見た。教Ⅲの「平面上の曲線」という単元では、放物線 $y^2 = 4px$ の焦点は $(p, 0)$ であるということが書かれている。また、「軸に平行な」光線が焦点に集まることを書いてあったので、軸に平行でない光線を放物線に反射させたとき、反射光はx軸の交点の座標について求めようと思った。

2. 方法

教Ⅲの教科書、P.27の証明を応用して考える。

3. 結果

① 放物線 $y^2 = 4px$ の軸に平行な光線について (教科書より)

$F(p, 0)$ を焦点とする放物線 $y^2 = 4px$

上の点 $A(x_1, y_1)$ における接線 l は、

$$l: y_1 y = 2p(x + x_1)$$

l はx軸の交点 B は $B(-x_1, 0)$

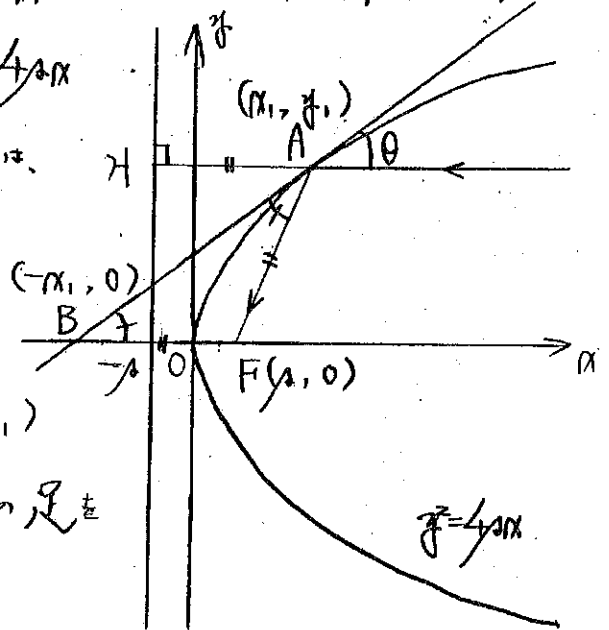
(l に $y=0$ を代入すると、 $p \neq 0$ より、 $x = -x_1$)

Aから準線 $x = -p$ に下ろした垂線の足を H とすると、放物線の定義より、

$$AF = AH = |x_1 + p|$$

また、 $BF = |x_1 + p|$ より、 $AF = BF$ なので、 $\triangle AFB$ で $\angle FAB = \angle FBA$

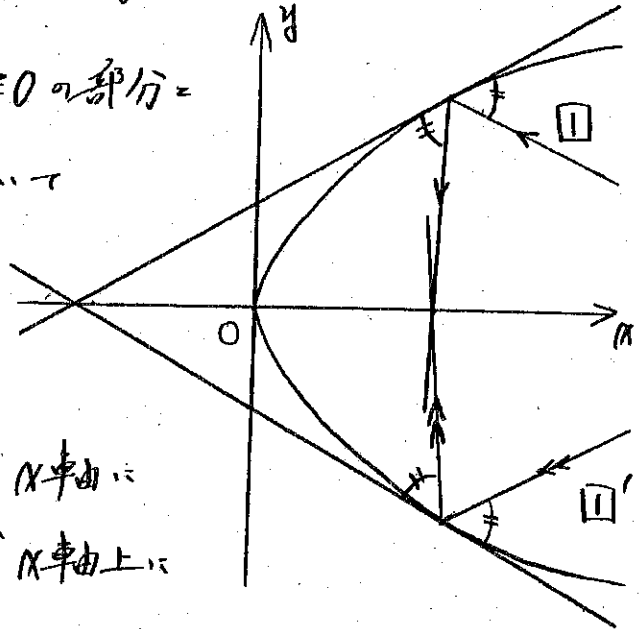
よって、Aで入射した光線 = 接線 l のなす角 θ は $\angle FAB$ に等しく、反射した光は焦点 F に到達する。



② 放物線 $y^2 = 4ax$ に反射した光線について考えるときは、放物線の $y \geq 0$ の部分に反射することを考えればよい。この証明

放物線 $y^2 = 4ax$ は x 軸について対称なので、ある光線 $\square = \square'$ は x 軸に関して対称な光線 \square' について考える。

$\square = \square'$ 、放物線 $y^2 = 4ax$ の $y \geq 0$ の部分 = $y \leq 0$ の部分それぞれ x 軸について対称なので、



$$(\square \text{ の入射角}) = (\square' \text{ の入射角})$$

よって、 \square の反射光 = \square' の反射光は x 軸に関して対称となり、この2つは必ず x 軸上に交点をもつ。

これ以降、図では、すべて放物線の $y > 0$ の部分で反射するおりにしたが、 $y < 0$ の部分に入射させても成り立つ。

③ 放物線 $y^2 = 4ax$ の軸に平行でない光線(直線)について、まず、ここでは原点に入射することは考えない。

放物線 $y^2 = 4ax$ (焦点 $F(a, 0)$) 上の点 $A(x_1, y_1)$ に入射する軸に平行でない光線 \square 、軸に平行な光線 \square' をする。 A における放物線の接線 l の x 軸の交点 B 、 \square の反射光 \square' の x 軸の交点 Q 、 $\square = \square'$ のなす角 $= \alpha$ 、 $\square = l$ のなす角 $= \theta$ をする。但し、 \square の入射角は 90° より小さいことをする。

2つの場合に分けて考える。

i) $OQ > OF$ のとき

①より、 $B(-x_1, 0)$, $\angle ABF = \theta$,

$AF = BF = |x_1 + a|$ となる。

$\angle AFQ = 2\theta$,

$\angle AQF = \pi - (\alpha + 2\theta)$.

よって、正弦定理より、

$$\frac{|x_1 + a|}{\sin\{\pi - (\alpha + 2\theta)\}} = \frac{FQ}{\sin \alpha}$$

$$\therefore FQ = \sin \alpha \cdot \frac{|x_1 + a|}{\sin(\alpha + 2\theta)} = \sin \alpha \cdot \frac{|x_1 + a|}{\sin \alpha \cos 2\theta + \cos \alpha \sin 2\theta}$$

$$= \frac{\sin \alpha \cdot |x_1 + a|}{\sin \alpha (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \cos \alpha \cdot 2 \sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{\sin \alpha \cdot |x_1 + a|}{\sin \alpha \cos^2 \theta - \sin \alpha \sin^2 \theta + 2 \cos \alpha \sin \theta \cos \theta}$$

ゆえに、 $Q\left(a + \frac{\sin \alpha \cdot |x_1 + a|}{\sin \alpha \cos^2 \theta - \sin \alpha \sin^2 \theta + 2 \cos \alpha \sin \theta \cos \theta}, 0\right)$

ii) $OQ < OF$ のとき

i)と同様に①より、 $B(-x_1, 0)$,

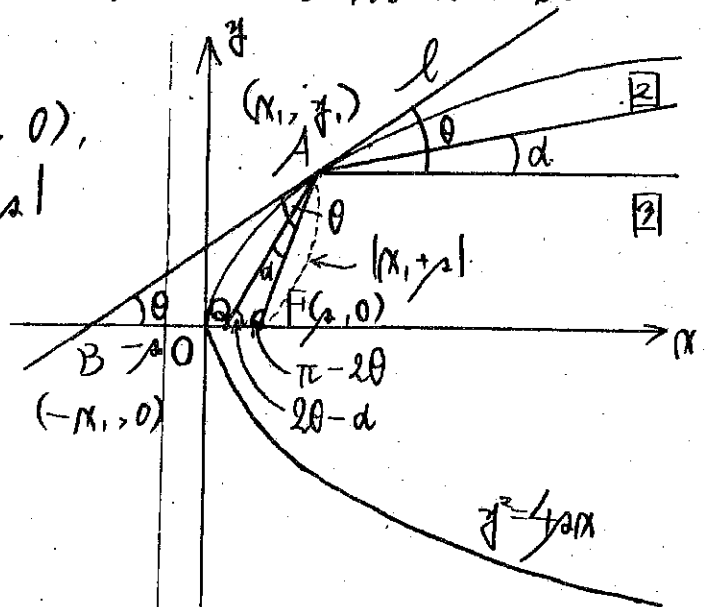
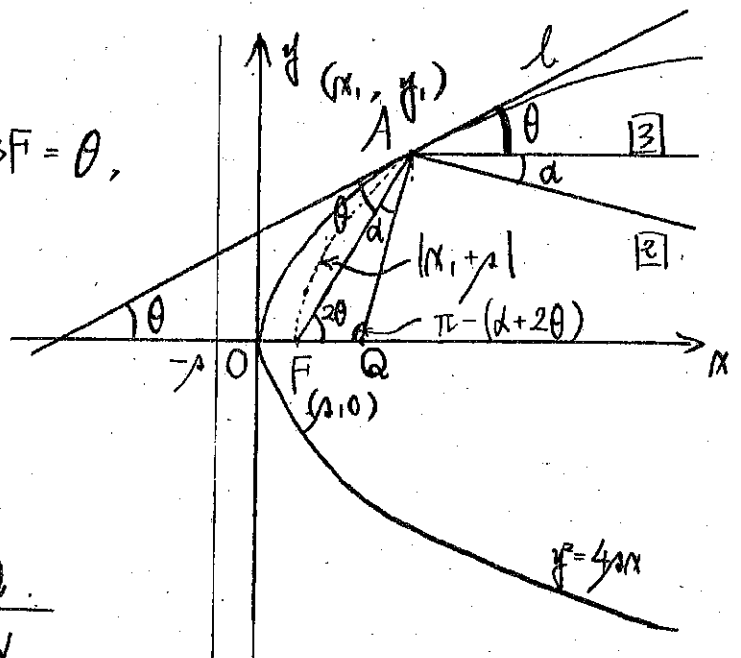
$\angle ABF = \theta$, $AF = BF = |x_1 + a|$

となる。

$\angle AFQ = \pi - 2\theta$

$\angle AQF = 2\theta - \alpha$.

よって、正弦定理より、



$$\frac{|x_1 + a|}{\sin(2\theta - \alpha)} = \frac{FQ}{\sin \alpha}$$

$$\begin{aligned} \therefore FQ &= \sin \alpha \cdot \frac{|x_1 + a|}{\sin(2\theta - \alpha)} = \sin \alpha \cdot \frac{|x_1 + a|}{\sin 2\theta \cos \alpha - \cos 2\theta \sin \alpha} \\ &= \frac{\sin \alpha \cdot |x_1 + a|}{2 \sin \theta \cos \theta \cos \alpha - (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin \alpha} \\ &= \frac{\sin \alpha \cdot |x_1 + a|}{-\sin \alpha \cos^2 \theta + \sin \alpha \sin^2 \theta + 2 \cos \alpha \sin \theta \cos \theta} \end{aligned}$$

ゆえに $Q(\alpha - \frac{\sin \alpha \cdot |x_1 + a|}{-\sin \alpha \cos^2 \theta + \sin \alpha \sin^2 \theta + 2 \cos \alpha \sin \theta \cos \theta}, 0)$

これは i) のとき $d = -d$ がおいた値に等しい。

また、i), ii) 両方 $d = 0$ がおくと、 Q は焦点 F と一致する

④ 放射線 $y^2 = 4ax$ に放物線を描きながら入射した光線(ボール)について、(ここで $a > 0$ として考える。 $a < 0$ のときは、絶対値が等しい正の a の場合を y 軸に関して対称移動させて考えればよい。)

入射した光の足跡は $a > 0$ として。

$$x = ay^2 + by + c \quad \text{--- ① ---} \text{を描くとする。}$$

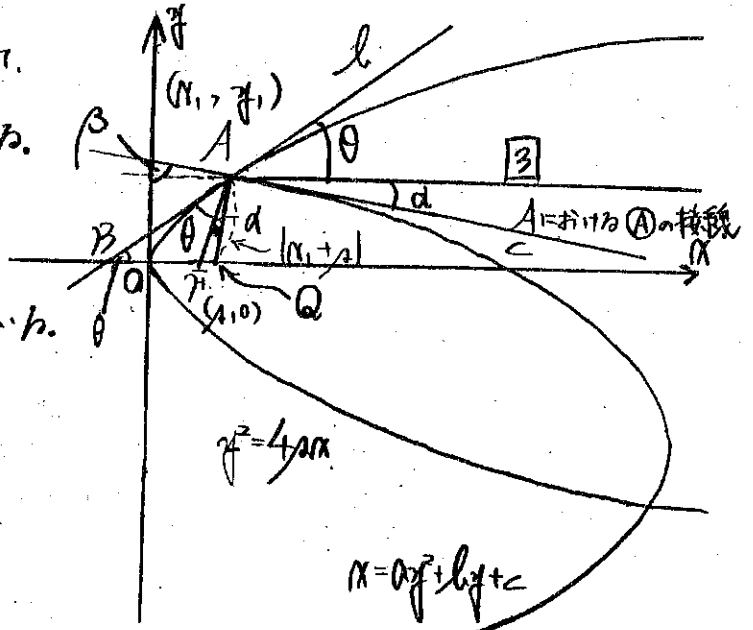
また、 $A, B, F, Q, \text{図}, l,$

θ は ③-1, 2 と同様に θ とする。

$$\text{④より、} x' = 2ay + b \text{ となる}$$

A における ① の接線の傾きは、

$$2ay + b$$



よって、前ページ右下の図のように、 $\beta = 2\alpha$ 、 $\tan \beta = 2\alpha z_1 + h$

また、 $d \in A$ における④の接線 = ②のなす角 = α 、 $\beta = \frac{\pi}{2} - d$

なので、

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - d\right) = 2\alpha z_1 + h \quad \therefore \frac{1}{\tan d} = 2\alpha z_1 + h$$

$$2\alpha z_1 + h \neq 0 \text{ かつ } \tan d = \frac{1}{2\alpha z_1 + h} \dots *$$

よって、④のときは、* = 消滅する d における③-1, ③-2 = 考えよう。

⑤ ③-1, 2, ④ における $\theta = A$ の x 座標 x_1 の関係について。

$x_1 = \theta$ には互いに関係があると考えられるので、 $x_1 = \theta$ で表すこゝは変数を減らすこゝと考えよう。図のように文字を置く。

$$z^2 = 4\alpha x \text{ かつ } \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dz}} = \frac{1}{\frac{z}{2\alpha}} = \frac{2\alpha}{z} \text{ なので、} A(x_1, z_1) \text{ にお$$

$$\text{ける } z^2 = 4\alpha x \text{ の接線の傾きは } \frac{2\alpha}{z_1}$$

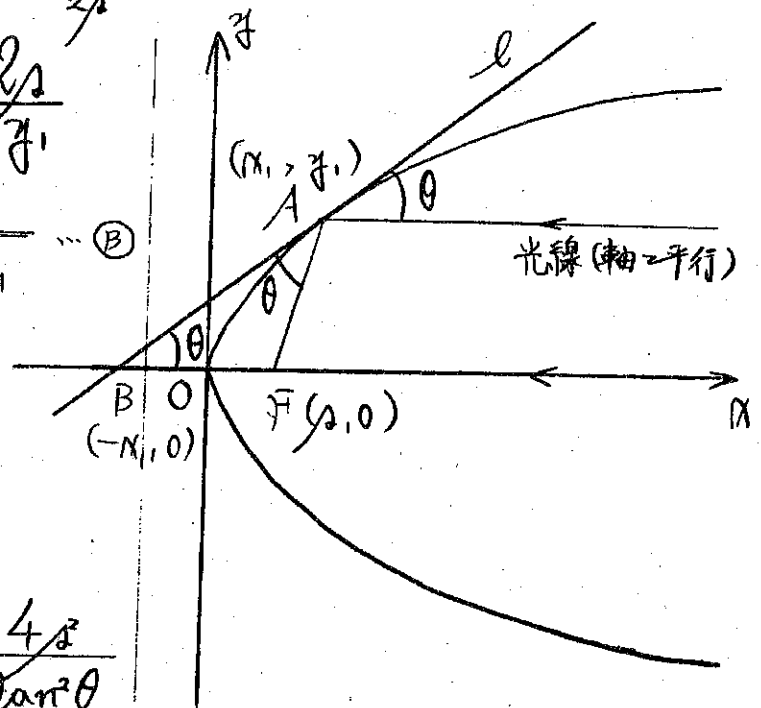
$$\text{となり、} \tan \theta = \frac{2\alpha}{|z_1|} = \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha x_1}} \dots \textcircled{B}$$

(θ は光線 = l のなす角なので、

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ かつ } \tan \theta > 0)$$

② かつ、

$$\sqrt{4\alpha x_1} = \frac{2\alpha}{\tan \theta} \quad \therefore 4\alpha x_1 = \frac{4\alpha^2}{\tan^2 \theta}$$



$$\therefore x_1 = \frac{a}{\tan^2 \theta}$$

これを③-1でのQのx座標に代入して、

$$Q \left(a + \frac{\sin d \cdot \left| \frac{a}{\tan^2 \theta} + a \right|}{\sin d \cos^2 \theta - \sin d \sin^2 \theta + 2 \cos d \sin \theta \cos \theta}, 0 \right)$$

4. まとめ

放物線 $y^2 = 4ax$ に入射する光線が反射した後に通るx軸上の点Qの座標は、

a , 反射点における接線と、反射点

を通る軸と平行な直線のなす角 θ , 入射した光線と、反射点を通る軸と平行な直線のなす角 d (但し、図の如く正の方向

と負の方向と定め、図の如く d は $-d$ と考えらる) の3つの文字を用いて次の如く表すことが出来る。これは $d=0$ とも成立する。

$$Q \left(a + \frac{\sin d \cdot \left| \frac{a}{\tan^2 \theta} + a \right|}{\sin d \cos^2 \theta - \sin d \sin^2 \theta + 2 \cos d \sin \theta \cos \theta}, 0 \right)$$

また、 $d=0$ としたとき、任意の θ に対して $Q(a, 0)$ となり、これは一般的に焦点と呼ばれる。 $d \neq 0$ のとき、Qは一定に定まらない。

5. 反省

今後、機会があれば、今回求めたQの座標や、 d, θ が動いたときに、Qはどのような軌跡を動くのか、また、 θ が限りなく0に近づいたときにどのような値を示すのか等について調べてみたい。

6. 引用参考文献

・数学Ⅲ advanced 東京書籍

・みんなのこに集まってる - ダイジェスト / 大科学実験

[https://www2.nhk.or.jp/school/movie/clip.cgi?das_id=](https://www2.nhk.or.jp/school/movie/clip.cgi?das_id=D0005300885_00000)

[D0005300885_00000](https://www2.nhk.or.jp/school/movie/clip.cgi?das_id=D0005300885_00000)

・今回の実験「みんなのこに集まってる」 / 大科学実験

www.daiikagaku.jp/content/vol022/

四平方の定理の拡張 (余弦定理の拡張)

二年六組七番 神谷大遥

抄録

余弦定理は三平方の定理を一般の三角形の場合に拡張したものである。以前、友達から三平方の定理を平面図形 (直角三角形) から空間図形 (直角三角錐) に拡張した「四平方の定理」なるものがあることを教えられ、ではこの「四平方の定理」を一般の三角錐の場合に拡張 (あるいは余弦定理を空間図形へ拡張) できないかと思ひ立ち、一般の三角錐における面積と角について成り立つ定理の導出を試みた。

1. 研究の背景と目的

三平方の定理を一般の三角形の場合に拡張した余弦定理、空間図形 (直角三角錐) に拡張した「四平方の定理」(面積 S_1, S_2, S_3, S における関係式、ド・グアの定理とも。) の証明方法を踏まえ、一般の三角錐における面積と角について成り立つ関係式を導くことを目指す。

	平面図形	空間図形
(直角)	三平方の定理 $c^2 = a^2 + b^2$	「四平方の定理」 $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$
一般の図形 (一般の角)	余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$	どんな関係式?

2. 「四平方の定理」(ド・グアの定理)

$\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$ である直角三角錐 OABC において、 $\triangle AOB = S_1$,
 $\triangle BOC = S_2, \triangle COA = S_3, \triangle ABC = S$ とするとき、

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$$

が成り立つ。

[証明] $OA = a, OB = b, OC = c$ とし、頂点 O から辺 BC に垂線を下ろしその足を D とする。

(平面 BOC) \perp OA より $BC \perp OA$... ①、また $BC \perp OD$... ②

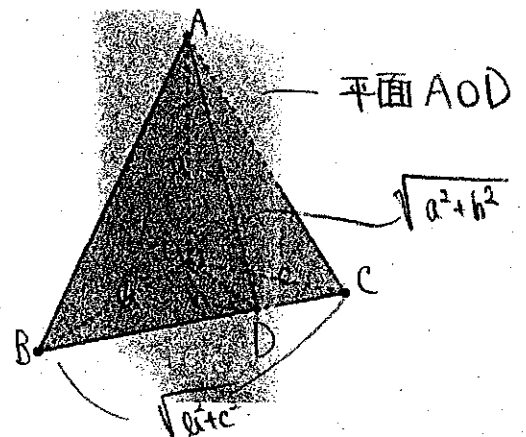
①②より、 $BC \perp$ (平面 AOD) なので、 $BC \perp AD$... ③

$BC = \sqrt{b^2 + c^2}$, また $OD = h$ とすると $AD = \sqrt{a^2 + h^2}$ なので、

$$S_1 = \triangle AOB = \frac{1}{2}ab, \quad \text{②から } S_2 = \triangle BOC = \frac{1}{2}h\sqrt{b^2 + c^2},$$

$$\triangle S_3 = \triangle COA = \frac{1}{2}ca, \quad \text{③から } S = \triangle ABC = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2}\sqrt{a^2 + h^2}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで、} \quad (\sqrt{b^2 + c^2}\sqrt{a^2 + h^2})^2 &= (b^2 + c^2)(a^2 + h^2) \\ &= (ab)^2 + (h\sqrt{b^2 + c^2})^2 + (ca)^2 \end{aligned}$$



よって、
$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{a^2+h^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}ab\right)^2 + \left(\frac{1}{2}h\sqrt{b^2+c^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}ca\right)^2$$

すなわち、

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$$

3-1. 第一余弦定理による第二余弦定理の証明

2で示した方法以外にも、ベクトルを用いた面積公式や外積を利用した証明があるように、拡張版「四平方の定理」の導出においてもベクトルは有効かもしれないが、まだ習っていないことも多い。そのため、ここでは、以下に示すチャートで見かけた「第一余弦定理を用いた第二余弦定理の証明」の流れを参考に拡張を試みることにする。

BC = a, CA = b, AB = c である $\triangle ABC$ において、

(i) 第一余弦定理

$$a = b \cos C + c \cos B$$

$$b = c \cos A + a \cos C$$

$$c = a \cos B + b \cos A$$

(ii) 第二余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

(i) の証明 第一式について証明する。

A から辺 BC におろした垂線の足を D とする。B \leq C のときについて示す。

[1] $0^\circ < B \leq C < 90^\circ$ のとき

BD = AB cos B, CD = CA cos C より

$$BC = CD + BD = CA \cos C + AB \cos B$$

が成り立つ。

[2] $0^\circ < B < C = 90^\circ$ のとき

BD = BC = AB cos B, cos C = cos 90° = 0 であるので

$$BC = BD = CA \cos C + AB \cos B$$

[3] $0^\circ < B < 90^\circ < C < 180^\circ$ のとき

BD = AB cos B, CD = CA cos(180° - C) = -CA cos C であるので

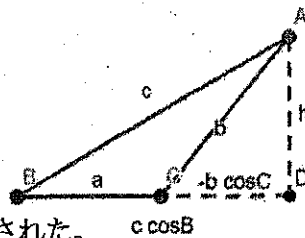
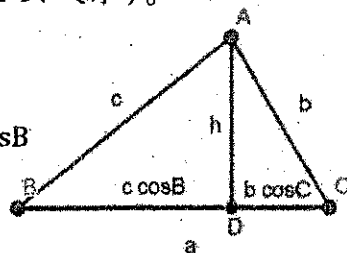
$$BC = -CD + BD = CA \cos C + AB \cos B$$

が成り立つ。

[1]から[3]より、(B \leq C のとき) $BC = CA \cos C + AB \cos B$ が示された。

B \geq C のときも同様である。

よって、第一式 $a = b \cos C + c \cos B$ が証明された。角を入れ替えれば第二式・第三式も同様に示される。



(ii) の証明 (i) を利用して第一式について証明する。

(i) より、 $a = b \cos C + c \cos B \dots ①$

$b = c \cos A + a \cos C \dots ②$

$c = a \cos B + b \cos A \dots ③$

ここで、式の対称性を利用して、各式の両辺を平方はせずに、それぞれに a, b, c を掛ける。

$a^2 = ab \cos C + ca \cos B \dots ①'$

$b^2 = bc \cos A + ab \cos C \dots ②'$

$c^2 = ca \cos B + bc \cos A \dots ③'$

$ab \cos C, ca \cos B, bc \cos A$ がいずれか二つずつ現れているのに注目して、 $②' + ③' - ①'$ より $ab \cos C, ca \cos B$ を消去すると、

$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A$

すなわち

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

3-2. 第一余弦定理の三角錐バージョン (?) 面積と正射影

調べていると、以下の〈定理〉を用いると、第一余弦定理の三角錐版である (?), (*) の式が成り立つことを知った。

〈定理〉二平面 P, Q のなす角が角 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) であり、平面 P 上に面積 S の図形があるとする。平面 Q に垂直な光によって Q に映される影の面積を S' とするとき、

$S' = S \cos \theta$

※ (*) では $\theta = 90^\circ$ のときは面積 $0, 90^\circ \leq \theta < 180^\circ$ のときはマイナスの面積 $S \cos \theta = -S \cos(180^\circ - \theta) = S' (< 0)$ とする。

→ ある三角錐 $OABC$ において、 $\Delta AOB = S_1, \Delta BOC = S_2, \Delta COA = S_3, \Delta ABC = S,$
 ΔABC が $\Delta AOB, \Delta BOC, \Delta COA$ それぞれとなす角を $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ とするとき

$S = S_1 \cos \theta_1 + S_2 \cos \theta_2 + S_3 \cos \theta_3 \dots (*)$

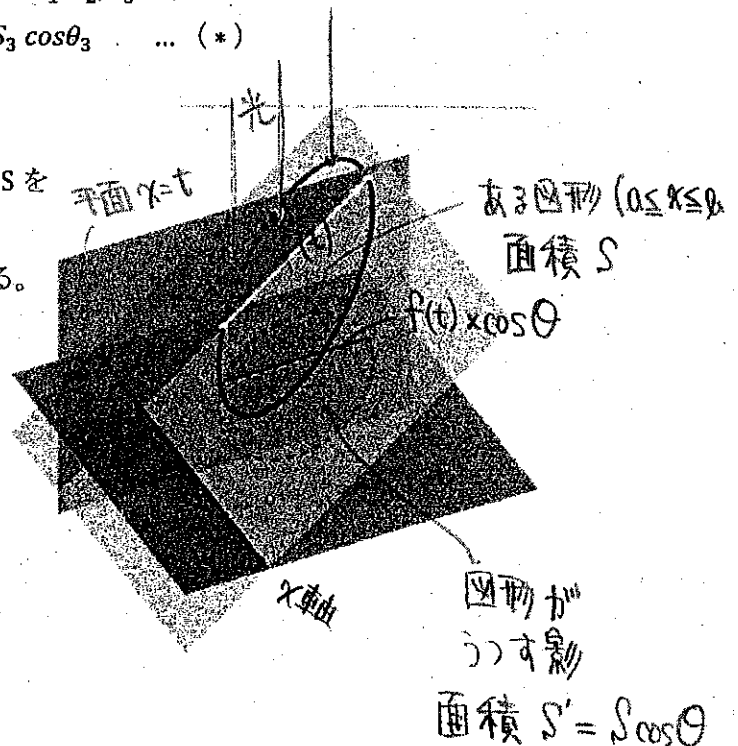
が成り立つ。

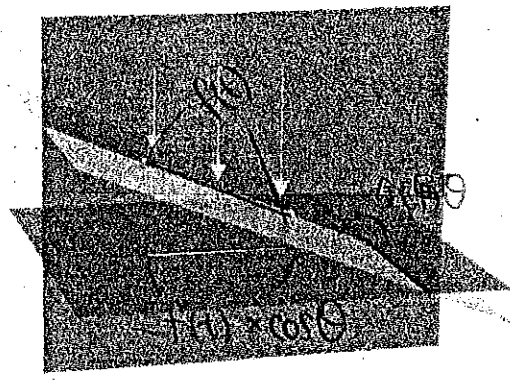
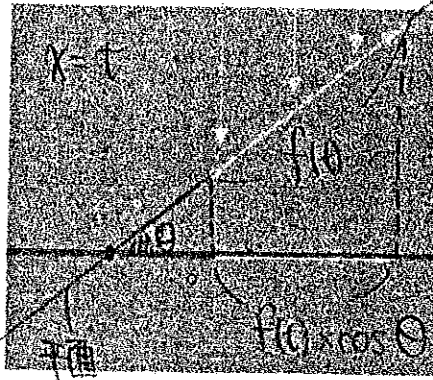
〈定理〉のだいたいの証明

P, Q の交線を x 軸として、積分である図形の面積 S を求めることを考える。 $x = t$ で図形を切ったときの長さを $f(t)$ として、 $a \leq t \leq b$ の範囲で積分する。

このとき、 $S = \int_a^b f(t) dt$ とすると、

$S' = \int_a^b f(t) \cos \theta dt$
 $= \cos \theta \int_a^b f(t) dt$
 $= S \cos \theta$





↑ $90^\circ \leq \cos\theta < 180^\circ$ のとき

以下、3-1.(i)と同様にして、場合分けする。

$0^\circ < \theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3 < 180^\circ$ として、 $\triangle AOB, \triangle BOC, \triangle COA$ が $\triangle ABC$ を含む平面 P に映す影の面積を考える。このとき、必ず $\theta_1 < 90^\circ$ である。

頂点 O から平面 P に下ろした垂線の足を D として、

[1] $0^\circ < \theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3 < 90^\circ$ のとき

$\triangle ADB = S_1 \cos\theta_1, \triangle BDC = S_2 \cos\theta_2, \triangle CDA = S_3 \cos\theta_3$ より
 $S = \triangle ADB + \triangle BDC + \triangle CDA = S_1 \cos\theta_1 + S_2 \cos\theta_2 + S_3 \cos\theta_3$
 が成り立つ

[2] $0^\circ < \theta_1 \leq \theta_2 < 90^\circ \leq \theta_3 < 180^\circ$ のとき

$\triangle ADB = S_1 \cos\theta_1, \triangle BDC = S_2 \cos\theta_2,$
 $\triangle CDA = S_3 \cos(180^\circ - \theta_3) = -S_3 \cos\theta_3$ より
 $S = \triangle ADB + \triangle BDC - \triangle CDA = S_1 \cos\theta_1 + S_2 \cos\theta_2 + S_3 \cos\theta_3$
 が成り立つ

[3] $0^\circ < \theta_1 < 90^\circ \leq \theta_2 \leq \theta_3 < 180^\circ$ のとき

$\triangle ADB = S_1 \cos\theta_1, \triangle BDC = S_2 \cos(180^\circ - \theta_2) = -S_2 \cos\theta_2,$
 $\triangle CDA = S_3 \cos(180^\circ - \theta_3) = -S_3 \cos\theta_3$ より
 $S = \triangle ADB - \triangle BDC - \triangle CDA = S_1 \cos\theta_1 + S_2 \cos\theta_2 + S_3 \cos\theta_3$
 が成り立つ

3-3. 拡張版四平方の定理の導出

3-1. (ii) の証明の流れを踏まえて拡張版四平方の定理を導出する。

三角錐 $OABC$ において、 $\triangle AOB = S_1, \triangle BOC = S_2, \triangle COA = S_3, \triangle ABC = S$ とする。

$\triangle ABC$ が $\triangle AOB, \triangle BOC, \triangle COA$ それぞれとなす角を $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ とし、さらに、 $\triangle BOC$ と $\triangle COA, \triangle COA$ と $\triangle AOB, \triangle AOB, \triangle BOC$ がなす角を α, β, γ とする。このとき、

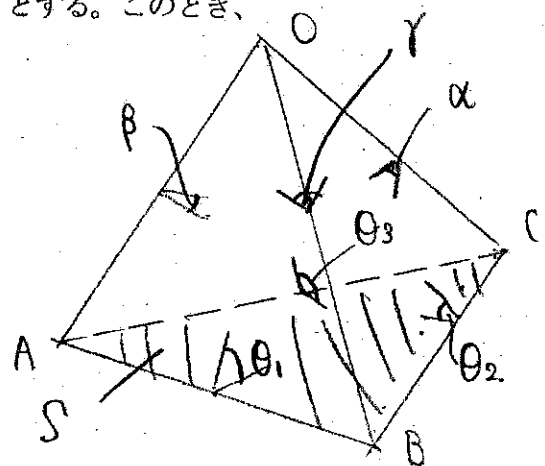
$$S_1 = S_2 \cos\gamma + S_3 \cos\beta + S \cos\theta_1 \quad \dots ①$$

$$S_2 = S_3 \cos\alpha + S \cos\theta_2 + S_1 \cos\gamma \quad \dots ②$$

$$S_3 = S \cos\theta_3 + S_1 \cos\beta + S_2 \cos\alpha \quad \dots ③$$

$$S = S_1 \cos\theta_1 + S_2 \cos\theta_2 + S_3 \cos\theta_3 \quad \dots ④$$

下線部が同じものどうしに注目する。



が成り立つ。①, ②, ③, ④にそれぞれ S_1, S_2, S_3, S をかけて,

$$S_1^2 = \underbrace{S_1 S_2 \cos \gamma}_{\text{消去}} + S_1 S_3 \cos \beta + \underbrace{S_1 S \cos \theta_1}_{\text{消去}} \dots ①'$$

$$S_2^2 = \underbrace{S_2 S_3 \cos \alpha}_{\text{消去}} + \underbrace{S_2 S \cos \theta_2}_{\text{消去}} + \underbrace{S_1 S_2 \cos \gamma}_{\text{消去}} \dots ②'$$

$$S_3^2 = \underbrace{S_1 S \cos \theta_1}_{\text{消去}} + S_1 S_3 \cos \beta + \underbrace{S_2 S_3 \cos \alpha}_{\text{消去}} \dots ③'$$

$$S^2 = \underbrace{S_1 S \cos \theta_1}_{\text{消去}} + \underbrace{S_2 S \cos \theta_2}_{\text{消去}} + \underbrace{S_3 S \cos \theta_3}_{\text{消去}} \dots ④'$$

右辺にある
 S の入った項を消去

①' + ②' + ③' - ④'より、

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - S^2 = 2S_2 S_3 \cos \alpha + 2S_1 S_3 \cos \beta + 2S_1 S_2 \cos \gamma$$

すなわち

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2S_2 S_3 \cos \alpha - 2S_1 S_3 \cos \beta - 2S_1 S_2 \cos \gamma \dots (\star)$$

よって一般の三角錐における面積 S_1, S_2, S_3, S と角 α, β, γ についての関係式を導くことができた。 $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ を代入すれば、 $\cos 90^\circ = 0$ より、四平方の定理が導かれる。

4. 外積による方法

後日調べたところ、外積によって面積 S を求める方法もあるようなので、少しだけ触れようと思う。定義や計算法則など詳しくは説明しないので、もし外積をまだ知らなくて、興味がある人がいたら、ぜひ自分で調べてみて欲しい。

正四面体 $O-ABC$ において、 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ とすると、
 $S_1 = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|, S_2 = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|, S_3 = |\mathbf{c} \times \mathbf{a}|,$
 $S = |(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{c})| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}|$ と表せる。

※ これを2乗すると、
 $S^2 = |\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}|^2$
 $= (\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a})$
 $= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|^2 + |\mathbf{c} \times \mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + 2(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
 $= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|^2 + |\mathbf{c} \times \mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{b} \times \mathbf{c}||\mathbf{c} \times \mathbf{a}|\cos(\pi - \alpha) + 2|\mathbf{c} \times \mathbf{a}||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|\cos(\pi - \beta) + 2|\mathbf{a} \times \mathbf{b}||\mathbf{b} \times \mathbf{c}|\cos(\pi - \gamma)$

この一番下の式は、先ほどの(★)の式と対応しており、導出した式が正しいことが分かる。

5. 結果・考察・結論 というより感想...

後に調べてみると、同じようなことを既に考えている人がいるようではあったが、無事に「拡張版四平方の定理」を導くことができた。しかし、平面のなす角 α, β, γ が出てきてしまうため、あまり実践で使う機会は無いと思われる。また、ベクトルの内積や外積を用いた別の導出方法にも、今後数学の学習を進めていく中でより詳しく調べていきたいと思う。

6. 参考資料

- 高校数学の美しい物語 四平方の定理 (図形の面積と正射影) <https://mathtrain.jp/yonheihou>
- 四平方の定理 (数学ネタ 68) - Coocan <http://tanuki.na.coocan.jp/Math/Math068.HTM>
- 受験の月【高校数学 B】ベクトルの外積(裏技)による法線 ... <https://examist.jp/mathematics/space-vector/vector-gaiseki/>

投射角から考える「ダーツの旅」に当たりやすい町

発表者 206 11 笹川悠斗

抄録

テレビ番組「笑ってコラえて」のコーナー「ダーツの旅」、日本地図にダーツを投げてロケ先を決める場面において、町や村の位置を文字で表して考えると、所によりダーツの当たりやすさに微妙な違いがあることがわかった。

研究の背景・目的

水曜日の夜七時五十六分にテレビのチャンネルを合わせれば、司会者・所ジョージさん(以下・所さん)の明るい第一声を聞くことができる。「一億人の大質問!? 笑ってコラえて!!!」・・・個性豊かな街の人々へのインタビューが笑いを誘う、国民的番組である。さて、七月には放送二十四周年を迎えたこの長寿番組において、その初回放送時から変わらず愛され続けてきた一つのコーナーが存在する。「日本列島 ダーツの旅」である。このコーナーは、所さんが数メートルほど離れた大きな的に、ダーツの矢を投げるところから始まる。的の中央にはマス目に収まった日本地図が描かれており、ダーツの矢が命中したマスにある町や村に、実際に番組ディレクターがインタビューに出かけるのだ。

このとき、どの地区を訪れることになるかは、ダーツを投げてみるまで分からない。所さんはダーツが特技だといわれるが(二十年も毎週ダーツやってたら当然)、それでも特定のマスを狙って当てるのはほとんど不可能であろう。しかしながら、私は疑問に思ってしまった。「どの地区もロケ地に当たる可能性は平等なのだろうか？」

所さんは番組の中で、ダーツを顔の前に構え、的の正面で投擲している。このとき、日本地図のすべてのマスが同じ幅に区切られているとしても、中央に近いマスに比べて、端に近いマスのほうが視度的に小さく、たしかに当たりづらそうな気がする。そこで、地図上のマス目によって当たりやすさに違いがあるのか、また差はどの程度なのか、物理分野と融合して考えてみることにした。

注釈

- ・数値の微小な差が問題になるであろうことを考慮し、計測値と計算結果の有効数字はそれぞれ3桁、6桁として計算している。
- ・タンジェントの値から角度を求める際に、CASIO さんの高精度計算サイトを使用させて

いただいた。

- ・重力加速度の値は近似値として9.8を用いている。
- ・一部の計算には Exel を用いた。
- ・計算の複雑さゆえか、このレポートは大変長尺である。注意。

方法

一つのマス目のダーツの当たりやすさを考えるにあたって、所さんがダーツの矢に与える初速度がいつも同じであるものとし、「そのマス目に当たるときにダーツの矢がとることのできる角度の範囲」の値を比較する。具体的には、地図の中央から左右両方向にmマス目、上からnマス目のマスに当たるとき、ダーツの矢が左右方向にとることのできる角度の範囲を θ_m 、上下方向にとることのできる角度の範囲を θ_n として、それらにより矢の重心を中心とする半径1の球面上にできる疑似長方形の面積を以て比較する(図1)。

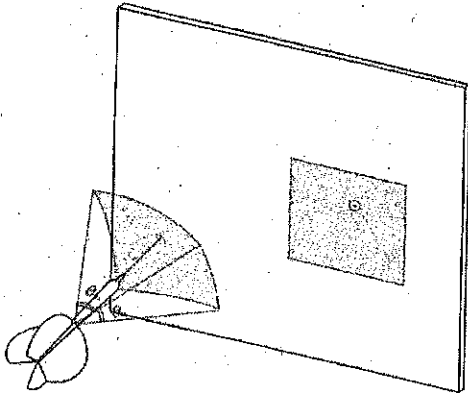


図1

ただし、球面上の疑似長方形の面積を正確に求めるのは困難なので、今回は、平面上の長方形に置き換えて計算した値を用いる。つまり、

$$\left(2\pi \cdot 1 \cdot \frac{\theta_m}{360}\right) \cdot \left(2\pi \cdot 1 \cdot \frac{\theta_n}{360}\right) = \frac{4\pi^2 \cdot \theta_m \cdot \theta_n}{360^2}$$

を用いるところである。しかし今回は実値を求めることでなく値どうしで比較することを目的としているので、上値から定数を割って除いた値

$$\theta_m \cdot \theta_n$$

を用いることとする。

さて、計算に使う実値の測定が必要であったため、実際の放送を録画して画面に定規をあててダーツの的の大きさなどを計測した。所さんの身長が172センチメートルであるところ

ろから比較して、的の円盤の半径は 0.75 メートル、マス目のもっとも外側の辺は左右歩行に幅 0.748 メートル、地面から 1 メートル離れて上方向に 0.90 メートルの大きさであった(図 2)。また、はっきりと映されたカットがなくあくまで目測であるが、マス目のもっとも外側の辺は、北と東はそれぞれ北海道本島の北端と東端、西は長崎県福江島、南は鹿児島県屋久島までを覆っており、マス目は左右方向に 34 マス、上下方向に 60 マスに分割されていたので、使用された日本地図は(図 3)のようであったと思われる。よって 1 マスの大きさは横が 2.2 センチメートル、縦が 1.5 センチメートルであることがわかる。投射点からの的までの距離は、これも目測だが 5.00 メートルとした。

次に投射点の地面からの高さを計測する必要がある。試しに自分でダーツの矢を投げる動作をしてみると、手の高さは 155 センチメートルであった。これは私の身長 169 センチメートルの 0.917 倍だから、この比を所さんに適用して、投射点の高さは 158 センチメートルと求められた。

最後に、所さんが矢に与える初速度を計測する。ある回では、矢は投射されてから 0.40 秒間飛び、投射点とほぼ同じ高さの青森県内のマスに当たった。この運動を水平方向と鉛直方向に分解して考えると、水平方向には等速直線運動であり、初速度は

$$\frac{5.00}{0.40} = 12.5 \text{ [m/s]}$$

である。鉛直方向には常に下向きに重力加速度 g がかかる等加速度運動であり、初速度は

$$\frac{\frac{0.40 \cdot g}{2} \cdot 0.40}{0.40} = 1.96 \text{ [m/s]}$$

この二つの値を三平方の定理で合成して、矢の進行方向への初速度は秒速 12.7 メートルと求められた。

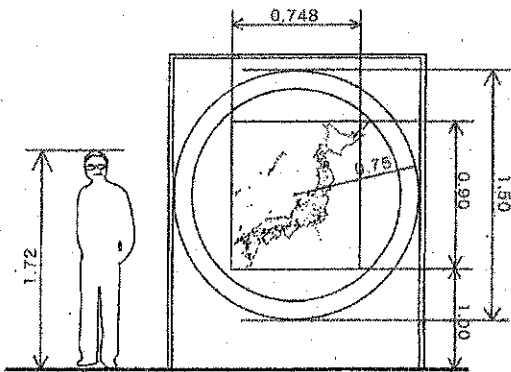


図 2

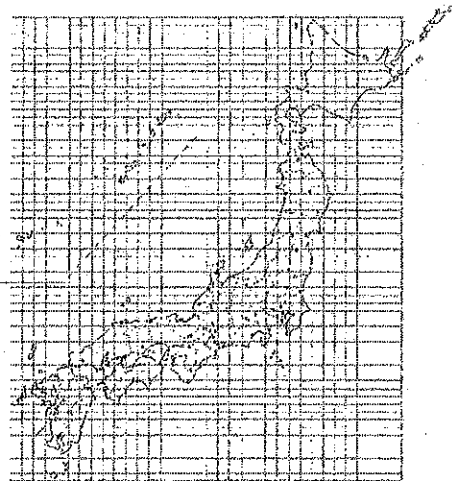
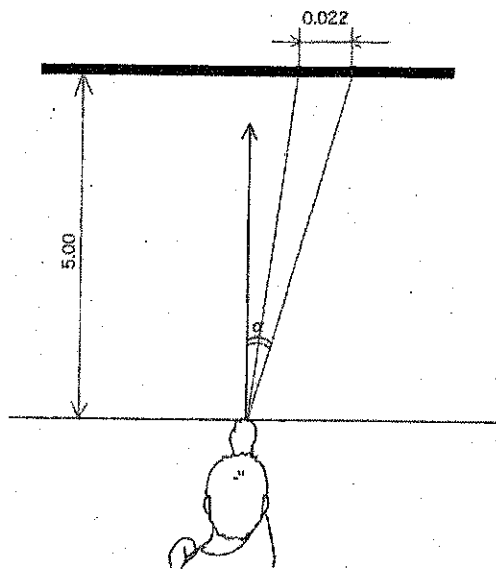


図 3

(i) $\tan \theta_m$ の値の公式化

上記の測定値から、地図の中央から左右に m マス目のマスに当たるとき、ダーツの矢のとることのできる角度の範囲 θ_m を m を用いて表す。(図4)のように真上から見た図を考えると、矢の軌道は的までの直線になるはずだ。ダーツの投射点と的の中央を通る的に対し垂直



な軸をとり、軸と矢の軌跡のなす角を α ($0^\circ \leq \alpha$) とすると、中央から m マス目のマスの中央に近い方の辺上に当たるときの角 α_1 について、

$$\tan \alpha_1 = \frac{0.022(m-1)}{5.00}$$

が成り立つ。また中央から遠い方の辺上に当たるときの角 α_2 について、

$$\tan \alpha_2 = \frac{0.022m}{5.00}$$

が成り立つ。

図4

以上より、加法定理を用いて、

$$\begin{aligned} \tan \theta_m &= \tan \alpha_2 - \tan \alpha_1 = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_1 \cdot \tan \alpha_2} \\ &= \frac{\frac{0.022}{5.00}}{1 + \frac{0.022^2 \cdot m \cdot (m-1)}{5.00^2}} \\ &= \frac{0.11}{5.00^2 + 0.022^2 m(m-1)} \end{aligned}$$

と表すことができた。

(ii) $\tan \theta$ n の値の公式化

同様の測定値から、地図の上から n マス目のマス目に当たるとき、ダーツの矢のとることのできる角度の範囲 θ n を n を用いて表す。(図 5) のように真横から見た図において (i) と同様の軸をとって考えると、矢の運動は放物運動になるはずである。この時の矢の到達点は、投射角のまま重力の影響を受けずに進みつづけた場合の位置から「その位置にたどり着くまでにどれだけ落ちたか」を引いて求めることができる。投射角を β とおき、初速度 $V=12.65$ [m/s] を図のように分解すると水平方向への速度 $V\cos\beta = 12.65\cos\beta$ [m/s] が得られるので、矢が 5.00 [m] 先の的に当たるのにかかる時間は

$$\frac{5.00}{12.65\cos\beta} \text{ [s]}$$

その間に重力によって落ちる距離は

$$\frac{5.00}{2} \cdot \frac{12.65\cos\beta \cdot g}{12.65\cos\beta} = \frac{5.00^2 g}{2 \cdot 12.65^2 \cos^2\beta} \text{ [m]}$$

よって、地図の上から n マス目のマスの下辺上に当たるときの投射角 β_1 について

$$\tan\beta_1 = \frac{1.90 - 1.578 - 0.015(n-1) + \frac{5.00^2}{2 \cdot 12.65^2 \cos^2\beta_1}}{5.00}$$

$$\tan^2\beta_1 - \frac{2 \cdot 12.65^2}{5.00 \cdot g} \tan\beta_1 + \frac{2 \cdot 12.65^2(0.337 - 0.015n)}{5.00^2 \cdot g} + 1 = 0$$

$$\tan\beta_1 = \frac{12.65^2}{5.00 \cdot g} \pm \sqrt{\frac{12.65^4}{5.00^2 \cdot g^2} - \frac{2 \cdot 12.65^2(0.337 - 0.015n)}{5.00^2 \cdot g} - 1}$$

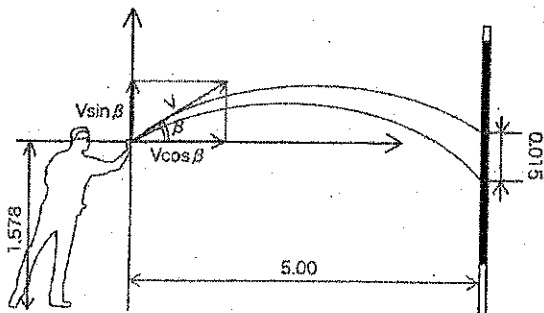


図 5

同様にマスの上辺上に当たるときの投射角 β_2 について

$$\tan\beta_2 = \frac{12.65^2}{5.00 \cdot g} \pm \sqrt{\frac{12.65^4}{5.00^2 \cdot g^2} - \frac{2 \cdot 12.65^2(0.322 - 0.015n)}{5.00^2 \cdot g} - 1}$$

このとき、有理部分の値は約 3.3 であり、根号部分の符号が+の場合、投射角が 70° を超え、(理論上は可能であるが)不適切であるので符号は-のみを採用する。ここで $\tan\beta_1$ 、 $\tan\beta_2$ の根号部分を $P, Q (P < Q)$ とおいて加法定理を用いて

$$\tan\theta_n = \frac{Q - P}{\left(\frac{12.65^2}{5.00 \cdot g} - P\right) \left(\frac{12.65^2}{5.00 \cdot g} - Q\right) + 1}$$

と表せる。以上(i),(ii)より、マス目の位置から、ダーツの矢のとることのできる角度の範囲を表すことができた。

結果・考察

以上に作成した二式を用いてマス目ごとのダーツの矢の当たりやすさを比較する(集大成にしてようやく面白いところである)。主要な都市に数値の大小が顕著であった地域を加えた八地域において計算してまとめたのが下表である。比較の助けとして、 $\theta_m \cdot \theta_n$ の値について名古屋市のを 100 パーセントとした比率を記載した。

地域	(m,n)	θ_m	θ_n	$\theta_m \cdot \theta_n$	比率
宗谷岬 (北海道)	(10,1)	0.251661	0.175734	0.0442253	99.4856%
秋田市	(7,23)	0.251895	0.176213	0.0443872	100.321%
東京	(7,39)	0.251895	0.175635	0.0442414	99.9910%
長野市	(4,35)	0.252041	0.175852	0.0443220	100.173%
名古屋市	(1,41)	0.252100	0.175508	0.0442454	100%
大阪市	(3,43)	0.252071	0.175368	0.0442052	99.9091%
福江島 (長崎県)	(17,50)	0.250779	0.174788	0.0438332	99.0684%
種子島	(14,60)	0.251215	0.173710	0.0436385	98.6284%

以上の結果より、かなり小さい差ではあるが、地域によって当たりやすさに確かな違いがあることが分かった。他にもいくつかのマスにおいて計算したところ、 θ mに関しては中心に近いほど、 θ nに関しては $n=19$ (青森市がこれに当たる)に近いほど値が大きくなった。俯瞰的に見ると、秋田市を含む日本海沿岸北部の地域はダーツに当たりやすく、北海道や種子島など末端地域や太平洋側の地域は当たりづらいといえる。もっとも当たりやすい地域と当たりづらい地域では、最大2%近い差があった。

これは私の個人的な評価なのだが、私の今暮らしている名古屋市は太平洋沿岸であるものの奥まっており、左右方向ではほぼ中央にあるため全国的に見ても大きいほうの値である。しかしながら私の生まれた須坂市(長野市と同じマスに収まっている)のほうにさらに大きい値となっており、名古屋市に引っ越してきたことが少しばかり悔やまれる結果となった。

ただし、今回の研究における結果が必ずしも実践的に正しいとは言えないのも事実である。たとえば実際の番組中では、「大阪市と神戸市が同じマスの中にある」「マスが人口過疎地域に当たるため撮れ高が期待できない」などの問題を解決するために、一マスの中をさらに区切る、マスの大きさを広げるなどの工夫がされている。この研究はそれらを無視して行ったものである。また冒頭で述べたとおり、球状の疑似長方形に長方形の面積の求め方を適用したこと、また m の値による飛距離の微妙な変動なども誤差を生んでいると考えられる。私がより進んだ数学技能を身に着けたときには、是非さらに踏み込んだ研究を行いたい。

参考

・改訂版物理基礎(数研出版)

・ウェブサイト 三角関数高度計算サイト

<https://keisan.casio.jp/exec/system/1161228774>

・ウェブサイト 日本テレビ 一億人の大質問!?笑ってコラえて!

<https://www.ntv.co.jp/warakora/>

音階の仕組み



2年 7組 39番

名前 村山 明日香

NO.1

<はじめに>

私は幼稚園の年中から中学3年の夏まで、約10年間ピアノを習っていた。
 今はアコースティックのピアノはアップライトピアノ、家に置いてある。アップライトピアノには高級な方で、グランドピアノは買えないほどの値段だが、家に置いてあるスペースは狭いので、その代わりに、存在感のあるグランドピアノ、ピアノの曲線を描いた形をしていて、ピアノの扉を開けると、曲線を描くように琴の弦が並んでいる。あれ、この曲線、ピアノで見に行けば...? あるいは、弦の長さと音階は数学と関係していて聞いてあげて...。そんなことを思いながら、ピアノの弦の長さと音階の、数学とどのような関係があるか調べてみた。

<平均律>

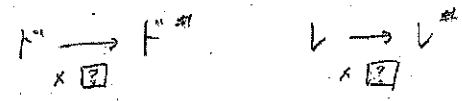
ピアノなどの楽器は、音階という音の音程関係を規定する基準にもとづいて音の高さを決定する。いわゆる「調律」といわれるもので、その音階は、現在ピアノに使われているのには、「平均律」と呼ばれるものである。平均律の構成方法は数学的に極めて単純なものである。1オクターブ間（例えばドから高いドまで）を均等な比率で分けていくのである。音の高さというのは、波長が長くなる、振動数が多くなる、音が高くなる、1オクターブ高い音は振動数が2倍であるという決まりがある。

ドから1オクターブ高いドまでの間には、半音を合わせて、

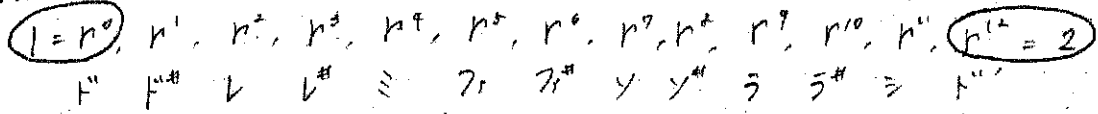


ド ド# レ ミ フ# ソ ソ# ラ ラ# シ ド# (2音)

の2音である。これらの波長が全て同じ比率をとり、つまり、ドからド#、レからレ#、ミからミ#、ソからソ#、ラからラ#、シからシ#、ド#からド#の2音に同じ比率をとり、半音上へ行くようにする。



同じ何回を繰り返して半音上げようとするという事は、2音を等比数列で表すことができる。このときの比率、つまり何回を繰り返すと、低いドの振動数を2倍にして、振動数の比は2になる。



音の高低 (低) -----> (高)

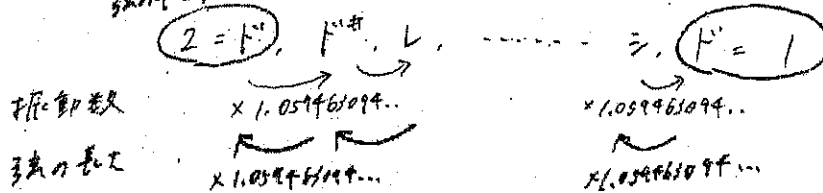
この数列の公比は、つまり、 $r^{12} = 2$ となる。

$r = \sqrt[12]{2}$ とする。

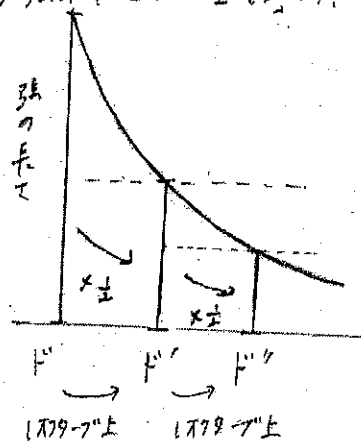
無理数!

これをExcelで計算した結果、 $r = 1.059463094...$ となる。

つまり、半音上げるとなると 1.059463099... 倍の振動数になるわけ。
 グランドピアノの弦の長さは長い方が音は低く、短いほど高い音が出る仕組み
 であり、1オクターブ上の音は弦の長さの半である。つまり振動数と
 逆の長さで、各音の 1.059463099... 倍の長さの弦にすると半音下がること
 になる。高レートの弦の長さを 1 とすると、
 弦の長さの比は次の通り。

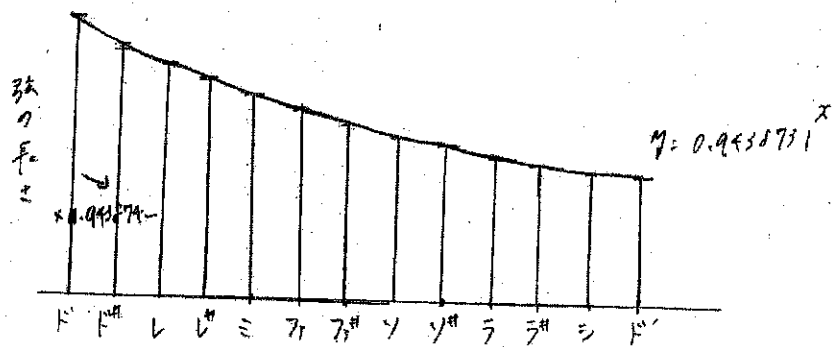


つまり、弦の長さ $\frac{1}{1.059463099...} = 0.94387431...$ 倍にすると半音上がる。
 「1オクターブ上の弦の長さの半倍、簡単な図を書くと、



$$y = 170.94387431 \times x$$

という指数関数のグラフに当てはめると
 になる。



つまり、グランドピアノの形は（実際には端の方は弦を巻いてはいるが）、
 そのおりにヤマハの曲線を描いているのである。

さて、グランドピアノの弦が音律により指数関数のグラフに当てはめられている。
 比率に従えば、自分で自由に音階を作ることができる。
 (つまり、ここで私は何を思った。自分で音階を調節すればいいから、グラスハーフ
 があるではいい)。と。グラスハーフはグラスに入れた水の量を調節して
 音階を作らば、その水の量にも音律が関係している。実は等比数列や
 指数関数に当てはめればいいから... と思う。実際にグラスに水を入れて、
 自分の絶対音感も使って実験してやることにした。(もはや小学生の自由研究)

～シンカウ心研究～



<方法>

グラスに水を入れ、グラスのふちを少しぬき、指の腹の内を撫くようにして音を出す。正確な音階にするために、絶対音階を使い、ガラスの水の量を調節していき、その時の水の量を測る。

<実験途中で起ったこと>

まず、それぞれに音が出たから、で、そうまた出たように思えたとき、途中で「レでもレ#でもない音」の時は、半音の中間の非常に微妙な音が出ることがあった。また、グラスの水の量を同じにしても、使用したグラスでは音が違って聞こえることが判明した。さらに、「120mlでも130mlでも同じ音が出た」ということがあったので、それぞれにその音階を鳴らすことでその水の量の範囲を全て測定した。

<結果>

音階	ド	ド#	レ	レ#	ミ	ファ	ファ#
水の量 (ml)	260	255	220 ? 225	200 ? 205	170 ? 150	120 ? 145	0 ? 70

$$\begin{pmatrix} 250 \times \\ 260 \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 220 \ 0 \\ 230 \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \ 0 \\ 210 \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 140 \ 0 \\ 150 \times \end{pmatrix}$$

※ 10ml単位でしか測れないから、レ#はレ#Aから、200mlでは鳴らさず210mlでは鳴らさずレ#では鳴らさず鳴らす、というときは10ml間をとり、205ml、と5ml単位で記録した。

<考察>

この結果から比率を計算しようと思ったが、範囲がある音階もあるから、外れについてはその範囲の中間の値を、小数点以下を四捨五入して値を使い、計算した。

ド	ド#	レ	レ#	ミ	ファ	ファ#
260	255	223	203	175	133	55

音階	ファ#→ファ	ファ→ミ	ミ→レ#	レ#→レ	レ→ド#	ド#→ド
比率	1.38	1.31578...	1.10	1.09852...	1.14349...	1.01960...

平均すると、1.589511... とは、半音上げるには $\frac{1}{1.589511...} \approx 0.62912$ 倍の水の量にすればいいという結果になった。

(ファ#→ファを除くと、1.147478、半音上げるには $\frac{1}{1.147478} \approx 0.87147$ 倍上げればよい)

比率にほぼソの差が出た。たぶんおあ。た。

原因としては、10ml単位でしか測りきれないという点、違う水の量でも同じ音が出たという点を予測しきれなかったこと、周波数を測りきれなかったから自分の絶対音階を使、たので、正確に音程を確認できていない部分がある、た可能性があることなどが考えられる。

たが $f_1 \rightarrow f_2$ の部分を除けば、ほぼ同じ比率には、たため、グラスハーブの水の量も、指数関数とほぼ等しいだろう。たが、今回は使ったグラスが f_1 だけで測り出せなかった、たので、ピッチの弦の長さと同じように、水の量を2倍にすると1オクターブ低くなるはずが確認できなかった。

<感想>

音階を決定する音程に、数式と指数関数の関係は知らなかった。音楽が苦手な人で、数学的に理解しきれなかったら「案外簡単かも...?」グラスハーブの奥義は、もともとグラスで2オクターブ分ぐらい音を出して測定してあったらいいと思、た。

<参考文献>

- ・ <https://green.ap.teacup.com/programmingdiary/1671.html>
「アラビヤ数字は指数関数のパター?」
- ・ <http://www.cno.zag.ne.jp/btaby300/math/music.html>
「鷺谷中学・高等学校 series 高校数学ニほれ話 第13話 数学科部長 渡邊幸治」
- ・ http://w3c.kanazawa-it.ac.jp/e-scimath/contents/203/textbook/203_all.pdf
石川県立鹿西高等学校 河野信子 「平均律の振動数、指数関数と三角関数の音階について」

天気の名は。

数学課題学習

発表者

・水野 由貴 ・山田 悠太 ・長谷川 輝虎

・抄録

映画のセリフを言いたいという目的から天気予報をつくってみた。

3つの要素から天気を求めるため、天気指数というものを定義し、その値で予報をつくった。

・はじめに(背景と目的)

某有名映画のセリフに「ねえ、今から晴れるよ」というセリフがある。

このセリフはとても言いたいのである。

そこで今回は、どのような場面なら問題なくこのセリフを使えるのかを検証していくことにする。

・検証するにあたって

この検証を行うためには天気を予測することが必要である。

天気の予測のためには、天気を決める何らかの要素から判断しなくてはならない。

そこで今回は、名古屋における「湿度(%)」「最高気温(℃)」「日照時間(h)」の3つの要素から天気を予測していくことにする。

これらの要素を選んだ理由としては、

①一般に天気の判断基準とされているものであるため。

②今回用いるデータのそれぞれの要素同士の相関係数をとると、すべての相関係数の絶対値が0.8を超えているので、これらのデータには大きな相関があり天気と連動して値が変化していると考えられるため。などが挙げられる。

また、それぞれの要素同士の相関係数が近い値になったことから、それぞれの要素は天気に対し同等の影響力を持っていると仮定する。

さらに、季節により基準が変動していくことが考えられるため、その影響が最小限になるように、今回は今年の夏(7月1日~8月17日)の名古屋の気象庁のデータをもとに予測を行うことにする。

参考①

それぞれの要素同士の相関係数

	日照・湿度	日照・最高気温	最高気温・湿度
相関係数	-0.87821	0.85971	-0.83627

方法

①要素の平均値を求める。

7月1日～8月17日における要素ごとの平均値を求める。

	湿度(%)	最高気温(°C)	日照時間(h)
平均	78.47917	31.30833	4.5

また、天気ごとにそれぞれの要素の平均値を求める。

	湿度(%)	最高気温(°C)	日照時間(h)
晴れ時平均	66.91667	35.61667	9.783333
曇り時平均	78.92593	31.0963	3.461538
雨時平均	92.55556	26.2	0.044444

②天気ごとに平均値のずれを求める。

続いて、天気ごとの平均値とすべての平均値を比較し、差を求める。

	湿度(%)	最高気温(°C)	日照時間(h)
晴れ時	-11.56250	+4.30834	+5.28333
曇り時	+0.44676	-0.21203	-1.03846
雨時	+14.07639	-5.10833	-4.45556

③最もその天気になりやすい要素の値を求める。

上記の表から要素別に晴れ・曇り時の平均、曇り・雨時の平均を求め、それぞれの要素別に、その天気にもなりやすい値の範囲を求める。

	湿度(%)	最高気温(°C)	日照時間(h)
晴れ	72.92130以下	33.35648以上	6.62244以上
曇り	72.92130以上	28.64815以上	1.75299以上
	85.74074以下	33.35648以下	6.62244以下
雨	85.74074以上	28.64815以下	1.75299以下

参考②

晴れ・曇り時、曇り・雨時の
要素別平均 (平均値基準)

	湿度(%)	最高気温(°C)	日照時間(h)
晴れ・曇り平均	-5.55787	+2.04816	+2.12244
曇り・雨平均	+7.26158	-2.66018	-2.74701

④要素ごとに天気への影響力を調べる。

それぞれの要素ごとの上記表での曇りに最もなりやすい値の範囲を求める。

	湿度(%)	最高気温(°C)	日照時間(h)
曇り 範囲	12.81944	4.70833	4.86945

またそれぞれの要素は天気に対し同等の影響力を持っていると仮定されているため、右図(参考③)より最高気温の値は湿度の値の2.72271386倍の影響力を持ち、日照時間の値は湿度の値の2.63262978倍の影響力を持っているということがわかる。

参考③

曇り範囲より求められる影響力の差

湿度 /最高気温	湿度 /日照時間
2.72271386	2.63262978

用いるデータ(一部省略)

日	湿度(%)	最高気温(°C)	日照時間(h)	実際の天気
7月	1	87	28.7	1.2 曇り
	2	66	29.9	6.8 曇り
	3	83	24.5	0 雨
	4	94	27.5	0.1 曇り
	5	82	30	2 曇り
8月	14	62	37.4	11.6 晴れ
	15	60	37.6	11.8 晴れ
	16	59	38.2	12.8 晴れ
	17	57	38.1	12 晴れ

その天気にもなりやすい
値の範囲を求めている。
(例: 湿度が平均から7.26158%以上
高い時最も雨になりやすい。)

⑤それぞれの天気の状態を求める。

天気を求めたい日の、それぞれの要素の平均値からのずれを要素別の影響力が同じになるように調整し、足し合わせたものを天気指数（高くなるほど晴れに近い）と定める。

※湿度のみ低い方が晴れに近くなる性質をもっているため、-1を掛け合わせてからたす。

つまり、④より、

$$\text{湿度の平均からのずれ} \times -1 + \text{最高気温の平均からのずれ} \times 2.72271386 + \text{日照時間の平均からのずれ} \times 2.63262978 = \text{天気指数}$$

となる。

ここで、晴れとなる天気指数の下限は、参考②より、

$$-5.55787 \times (-1) + 2.04816 \times 2.72271386 + 2.12244 \times 2.63262978 = 16.72202$$

また、雨となる天気指数の上限は、参考②より、

$$7.26158 \times (-1) + (-2.66018) \times 2.72271386 + (-2.74701) \times 2.63262978 = -21.73635$$

よって天気指数を求め、右図(参考④)に照らし合わせることによって天気を調べることが出来る。

	天気指数
晴れ	16.72202以上
曇り	-21.73635以上 16.72202以下
雨	-21.73635以下

・結果

求めた天気指数表を使って、7月1日～8月17日の実際の天気と予報を照らし合わせると一致率は66%となった。

つまり、「ねえ、今から晴れるよ」というセリフを言いたい場合は

天気指数が16.72202を超えていて、なおかつ3分の2を引くことのできる運を持つ必要があるといえる。

もしくは日本語としてだいたい8割、たいていが8.5割を表すといわれているので80%×85%=66%より、天気指数が16.72202を超えているとき、

「ねえ、だいたい今からたいてい晴れるよ」といえば間違いないと考えられる。

・参考

気象庁の名古屋の過去データ

https://www.data.jma.go.jp/obd/stats/etrn/view/hourly_s1.php?prec_no=51&block_no=47636&year=2020&month=07&day=12&view=p1

積分と特殊関数について

加藤徳啓 蒔田歩夢

1. 研究の背景とその目的

ある日、YouTubeを観ていると、「予備校のノリで学ぶ『大学の数学・物理』」というチャンネルの「積分が解けないドッキリ」という動画に出会った。<https://youtu.be/Mlg9gpDWkbw> ここでの解けないとは、答えが初等関数（多項式、 $\sin x$ などの我々が知っているような関数）で表すことが出来ないことを意味する。初等関数でないものは特殊関数というが、どのような特殊関数があるのだろうか、またどのような関数の原始関数が特殊関数になるのか、という疑問が湧いてきたので調べることにした。

2. 方法

Excelの乱数 (Randbetween) を持ちいて、様々な関数を作り出し、それらを積分した。

<関数の作成方法>

- ①割り算を含むかどうかを決める。0が出たら割り算なし、1が出たら割り算ありとした。
- ②いくつ式を掛けるかを定める。1~5で出た数だけ式を掛ける。割り算ありのものに関しては、分母・分子でそれぞれ行なった。
- ③式を決める。1~6の数にそれぞれ $\sin x$ 、 $\log x$ などを対応させて、式を決める。

この方法により100個関数を作り出したが、割り算のあるものについては、そもそも一般的な数式で表すことが出来ないものが多いことが判明したため、割り算なしを50個、割り算ありを10個に絞ることにした。

作成した関数の原始関数に特殊関数が含まれていたものをいくつかあげていく。

$$\int \sin x \log x dx = Ci(x) - \cos x \log x + C$$

$$\int e^x \tan x dx = ie^x({}_2F_1(-\frac{i}{2}, 1; 1 - \frac{i}{2}; -e^{2ix})) - (\frac{2}{5} + \frac{i}{5})e^{(1+2i)x}({}_2F_1(1, 1 - \frac{i}{2}; 2 - \frac{i}{2}; -e^{2ix})) + C$$

$$\int e^x \tan x dx = \sin x \log x - Si(x) + C$$

$$\int x \tan x dx = \frac{1}{2}i(Li_2(-e^{2ix}) + x(x + 2i \log(1 + e^{2ix}))) + C$$

$$\int e^x \log x dx = e^x \log x - Ei(x) + C$$

$$\int \sin x \cos x (\log x)^2 dx = \frac{1}{4}(2ix({}_3F_3(1, 1, 1; 2, 2, 2; -2ix)) - 2ix({}_3F_3(1, 1, 1; 2, 2, 2; 2ix)) - \log(\log(-2ix) + \log(2ix)) - \log x + \Gamma(0, -2ix) + \Gamma(0, 2ix) + \log x \cos 2x + 2\gamma) + C$$

などとなった。

3. 様々な特殊関数

その1. 正弦積分 $Si(x)$

$Si(x)$ は次のように定義される。

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

級数展開表記は $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$ である。

その2 余弦積分 $Ci(x)$

$Ci(x)$ は次のように定義される。

$$Ci(x) = - \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

また、 $\gamma + \log x + \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t} dt$ と表すこともできる。

級数展開表記は $\gamma + \log x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)(2n)!}$ である。

その3 指数積分 $Ei(x)$

$Ei(x)$ は次のように定義される。

$$Ei(x) = - \int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

また、 $\gamma + \log x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{kk!}$ と表すこともできる。

その4 超幾何関数 $F(a, b, c; z)$

$F(a, b, c; z)$ は次のように定義される。

$$F(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n$$

※ $(a)_n$ の意味について

ポツホハマー記号といい、 $(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1) = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}$ とされている。

特殊値として、 $(1)_n = n!$ や、 $(\frac{1}{2})_n = 2^{-n}(2n-1)!!$ などがある。

超幾何関数の特徴は、多くの初等関数や特殊関数を包含していることである。

例えば、 $\log(1+z)$ 、 $\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ 、 $\sin^{-1}x$ (\arcsinx)、 $\tan^{-1}x$ ($\arctan x$) や、楕円積分 $K(k)$ 、

$E(k)$ を超幾何関数で表すことが可能である。

また、オイラー積分で表すことも可能である。

$$F(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} (1-tz)^{-b} dt \quad (|z| < 1, 0 < a < c, a \text{ と } c \text{ は実数})$$

その5 不完全ガンマ関数 $\gamma(a, x)$ 、 $\Gamma(a, x)$

0以上の実数 x と、実部が正の複素数 a に対して

$\gamma(a, x)$ を第1種不完全ガンマ関数といい、

$$\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt$$

$\Gamma(a, x)$ を第2種不完全ガンマ関数といい、

$$\Gamma(a, x) = \int_x^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt \text{ と定義される。}$$

ガンマ関数の定義が $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$ であることから $\gamma(a, x) + \Gamma(a, x) = \Gamma(a)$ が成り立つ。さら

に、 $\Gamma(a, 0) = \Gamma(a)$ 、 $\gamma(a, x) \rightarrow \Gamma(a) (x \rightarrow \infty)$ 、 $\Gamma(0, x) = -Ei(-x) (x > 0)$ 、 $\Gamma(1, x) = e^{-x}$ 、 $\gamma(1, x) = 1 - e^{-x}$ が成り立つ。また、部分積分を用いると、 $\Gamma(a+1, x) = a\Gamma(a, x) + x^a e^{-x}$ 、 $\gamma(a+1, x) = a\gamma(a, x) - x^a e^{-x}$ が成り立つと分かる。

その6 多重対数関数 $Li_s(z)$

複素数 s と $|z| < 1$ を満たす複素数 z に対して $Li_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}$ と定義される。

特に $s = 1$ のときは自然対数となる。 $Li_1(z) = -\log(1-z)$

また、 $s = 2$ と $s = 3$ のときはそれぞれ dilogarithm、trilogarithm と呼ばれ、この名前は上記の和の代わりに次のような積分の繰り返しによって定義できることから来ている。

$$Li_{s+1}(z) = \int_0^z \frac{Li_s(t)}{t} dt$$

また、 s が負の整数ならば、この関数は有理関数となる。

さらに、定義式で形式的に $z = 1$ として、 $Li_s(1)$ を s の関数とすれば、定義式の右辺が $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ となるこ

とから明らかに、リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ と一致する。つまり、 $Li_s(1) = \zeta(s)$ が成り立つ。

それだけでなく、 $z = -1$ とすれば、 $Li_s(-1) = (2^{1-s} - 1)\zeta(s)$ が成り立つ。

上記の原始関数には特殊関数だけでなく、ある特別な定数も出てきたのでそれについても書いておく。

オイラーの定数 γ

これは数学定数の一つで、 $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x} \right) dx$ と定義される。値はおよそ

0.57721..... で、超越であるかと予想されているが、無理数であるかどうかさえ分かっていない。また、これはガンマ関数とも大いに関わっている。ガンマ関数は上記の表し方だけでなく、

$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n n!}{\prod_{k=0}^n (z+k)}$ に対し、その対数微分であるディガンマ関数

$$\Psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log n - \sum_{k=0}^n \frac{1}{z+k} \right)$$

に $z = 1$ を代入すると

$$\Psi(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log n - \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\gamma - \frac{1}{1+n} \right) = -\gamma$$

を得ることができる。

また $\gamma = - \int_{-\infty}^{\infty} u e^{u-e^u} du$ ($u = \log t$) や $\gamma = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \frac{e^{-t}}{t} \right) dt$ と積分を用いて表すことも可能

である。

4. 原始関数に特殊関数が含まれる関数の共通点について

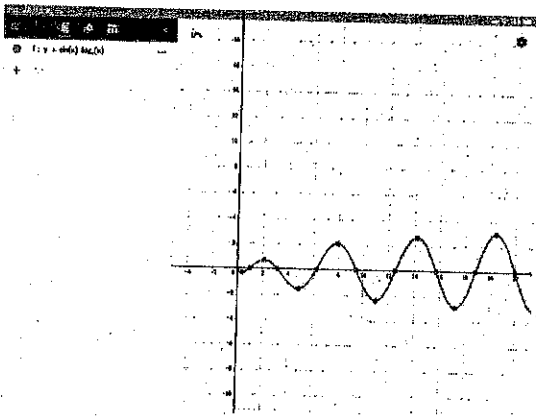
高校では $x = a$ で微分可能かそうではないか、を判別する方法を習う。その方法というのが、

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が存在するかを調べるというものである。これを習うとき、たいてい、 $x = a$

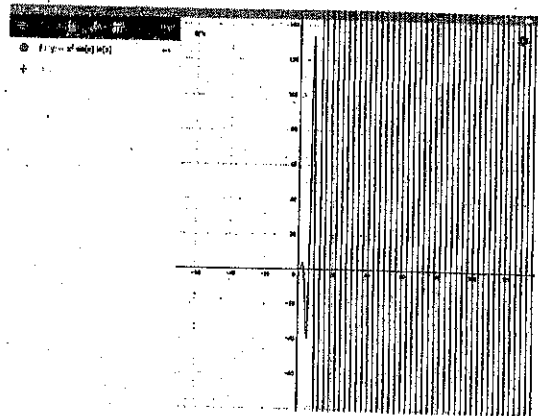
で連続かどうかを調べる方法も一緒に習う。そして、 $x = a$ で微分可能 $\Rightarrow x = a$ で連続 ということも習う。我々はそこに着目した。積分も連続、不連続が関係しているのではないかと考えた。

まずはグラフを書いてみることにした。

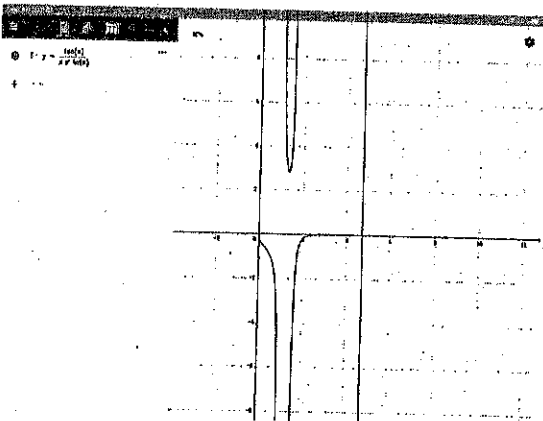
①



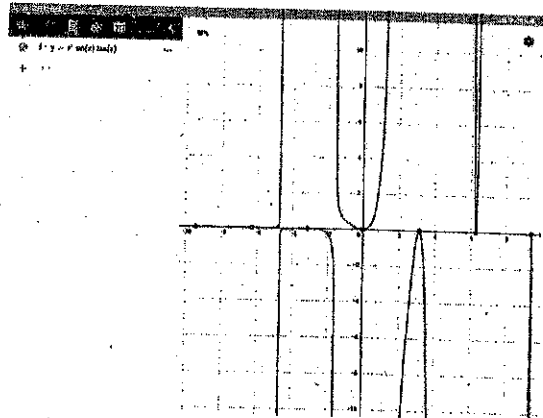
②



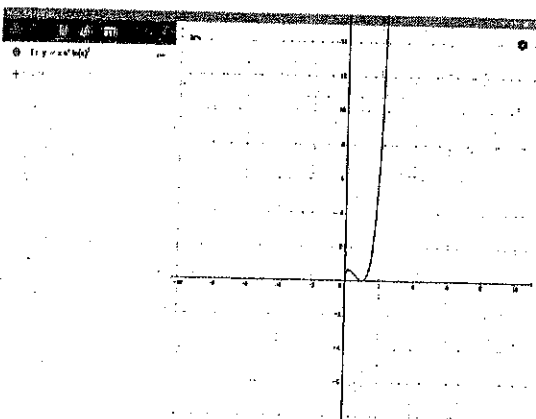
③



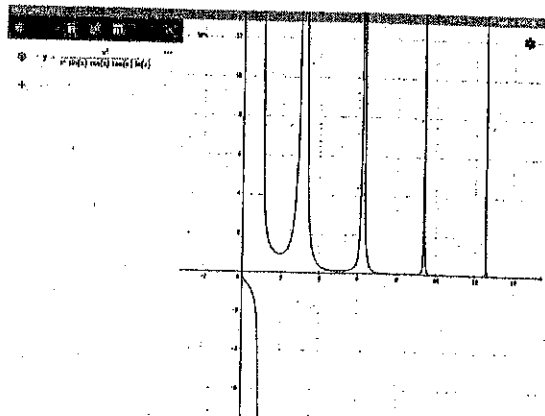
④



⑤



⑥



原始関数が特殊関数になったものの一部のグラフをあげた。連続しているようなものも不連続と思われるものも、両方あることが分かる。例えば、④が $x = \frac{\pi}{2}$ で連続かどうか調べてみる。

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} e^x \sin x \tan x = -\infty \text{ であり、 } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} e^x \sin x \tan x = \infty \text{ であることから } x = \frac{\pi}{2} \text{ で不連続である}$$

と分かる。また、①や②、⑤は実数全体や $x > 0$ の範囲で連続な関数の積でできている関数であるから、 $x > 0$ の範囲で連続である。そのため、原始関数に特殊関数が含まれるならばそれは不連続だ、という仮説は正しくなかったことが分かる。その逆も不連続の代表である $\tan x$ の積分が

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\log |\cos x| + C \text{ と表すことができることから明らかに}$$

正しくないと分かる。

ここで、今度は①、②、③、⑤、⑥に注目してみる。これらは $\log x$ が含まれていて、定義域が $x > 0$ である（もちろん複素数も考えれば $x \neq 0$ の範囲で定義できるのだが）。これについて考えてみる。まずは $\log x$ の原始関数から。

$$\int \log x dx = \int (x)' \log x dx = x \log x - \int x \times \frac{1}{x} = x \log x - x + C \dots\dots (*) \text{ となる。やはり } \tan x \text{ 同様これ}$$

は特殊関数にはならないようである。ここで、①、②、③を見ると、 $\log x$ の他に三角関数、指数関数が使われていることがわかる。これが関係していように思える。というのも、正弦積分、余弦積分、指数積分は全て分母に x があるからである。 $\log x$ があると、(*)で行なったように、部分積分の過程で $\frac{1}{x}$ が出てくる可能性が高いと考えられる（これを証明することはできなかったのだが）。結果として特殊関数が現れることになる。

また、④の原始関数は超幾何関数で表されるのだが、元の関数には $\log x$ が含まれていない。このことは、三角関数や指数関数の定義に関係していると思う。

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ と定義されたり、書くことが出来}$$

たりする。これは $F(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n$ と定義される、超幾何関数と非常によく似ている。

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \int \cos x dx = \sin x + C, \int e^x dx = e^x + C \text{ より、どれだけ部分積分されても}$$

三角関数は三角関数のまま、指数関数は指数関数のままであり続けるであろうということが分かる。その結果、原始関数が超幾何関数で表されることになるのではないかと考えた。しかしながら、これもまた、きちんとした証明をすることが出来なかった。

5. リウヴィルの定理の紹介

原始関数に特殊関数が含まれるかどうかに関しての定理がリウヴィルの定理である。

・リウヴィルの定理の主張

y_1, y_2, \dots, y_n は $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx}$ が x, y_1, y_2, \dots, y_n の有理関数になるような x の関数とする。

$F(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ を x, y_1, y_2, \dots, y_n の有理関数とする。このとき、以下が同値である。

(i) $F(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ の原始関数が初等関数で書ける。

(ii) 複素定数 $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{C}$ と有理関数

$G_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), G_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, G_m(x, y_1, y_2, \dots, y_n), H(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ が存在

在して、 $F(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{j=1}^n c_j \frac{\frac{d}{dx} G_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n)}{G_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} + \frac{d}{dx} H(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ と書ける。

また、原始関数に特殊関数が含まれるかどうかを調べるものとして、他にも「リッシュのアルゴリズム」がある。

6. 結論

どんな積分も部分積分と置換積分を駆使すれば解けると思っていたが、そうではないことが分かった。そして、解けないものの原始関数には特殊関数が含まれており、特殊関数にはとてもたくさんの種類があることが分かった。積分が解けなくなる原因として不連続や $\log x$ が含まれることを考えたが、若干そのような傾向があることを感じただけで証明はできなかった。しかし、それはリウヴィルの定理やリッシュのアルゴリズムを使えば判断できるとのことだそう。

7. 参考文献

積分計算...Wolfram Alpha <https://ja.wolframalpha.com>

グラフ作成...GeoGebra

<https://ja.wikipedia.org/wiki/超幾何関数>

<https://ja.wikipedia.org/wiki/不完全ガンマ関数>

<https://ja.wikipedia.org/wiki/オイラーの定数>

<https://ja.wikipedia.org/wiki/多重対数関数>

[https://ja.wikipedia.org/wiki/リウヴィルの定理 \(解析学\)](https://ja.wikipedia.org/wiki/リウヴィルの定理_(解析学))

<https://ja.wikipedia.org/wiki/リッシュのアルゴリズム>

<https://ja.wikipedia.org/wiki/ポツホハマー記号>

<https://tetobourbaki.hatenablog.com/entry/2017/02/21/132434>

http://support.ptc.com/help/mathcad/ja/index.html#page/PTC_Mathcad_Help/integral_sin_cos.html

<https://keisan.casio.jp/exec/system/1166086945>

夏・冬の大三角の面積

Date

No.

2-8 | 青山天空 5 近藤 史弥 B 西口雄太

1. 研究の背景と目的

課題でやる内容を探していたとき非ユークリッド幾何学という言葉に興味をもった。さらに調べると地球上の図形の面積がわかるというのが星座の面積を調べてみようと思った。

2. 内容

数多くある星座の中で2つの有名な三角形である夏の大三角と冬の大三角が、空の中でどのくらいの面積を占めているのかを球面三角法を用いて調べる。この2つの三角形を構成している星の位置は下の表のようになっている

		赤経	赤緯
夏	ベカ	18h 36m 56.3s	+38°49' 1"
	アルタイル	19h 50m 47.0s	+8°52' 06"
	デネブ	20h 41m 25.9s	+45°16' 49"
冬	シリウス	6h 45m 8.9s	-16°41' 58"
	プロキオン	7h 39m 18.1s	+5°13' 29"
	ベテルギウス	5h 55m 10.3s	+7°24' 25"

3. 結果

赤経を度に変換する。赤経の1時間(東周)は $360 \div 24 = 15$ 分は $15 \div 60 = 0.25^\circ$ 、1秒は $0.25 \div 60 = 0.004^\circ$ であるから、

$$\text{ベカ} \dots 18 \times 15 + 36 \times 0.25 + 56.3 \times \frac{1}{240} \approx 279^\circ$$

$$\text{アルタイル} \dots 19 \times 15 + 50 \times 0.25 + 47 \times \frac{1}{240} \approx 298^\circ$$

$$\text{デネブ} \dots 20 \times 15 + 41 \times 0.25 + 25.9 \times \frac{1}{240} \approx 310^\circ$$

$$\text{シリウス} \dots 6 \times 15 + 45 \times 0.25 + 8.9 \times \frac{1}{240} \approx 101^\circ$$

$$\text{プロキオン} \dots 7 \times 15 + 39 \times 0.25 + 18.1 \times \frac{1}{240} \approx 115^\circ$$

$$\text{ベテルギウス} \dots 5 \times 15 + 55 \times 0.25 + 10.3 \times \frac{1}{240} \approx 89^\circ$$

また、赤緯の分は $\frac{1}{60}$ 、秒は $\frac{1}{3600}$ であるので、30分以上は繰り上げ30分未満は切り捨てて一の位までの概数で表すこととする。

地球の中心をOとし、天球の半径をとす。Z軸の正の方向の上に赤緯、赤経が共に0の点かくるよう座標空間で表すと、

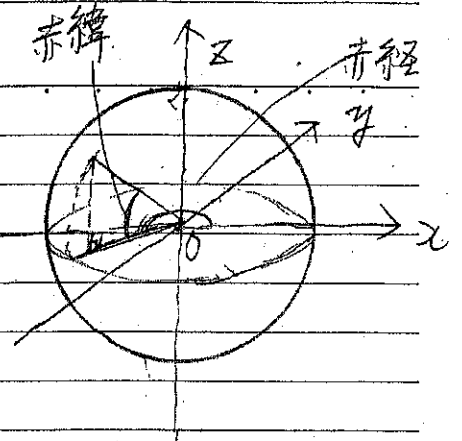
赤経を α , 赤緯 β とすると星の座標は
右の図より

$$(x, y, z) = (r \cos \beta \cos \alpha, r \cos \beta \sin \alpha, r \sin \beta)$$

以下

Δ が A , Γ が B , Σ が C

Δ が D , Γ が E , Σ が F とする



このとき

$$\cos \angle AOB = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{r^2} = \cos 39^\circ \cos 29^\circ \cos 9^\circ \cos 298^\circ + \cos 39^\circ \sin 29^\circ \cos 9^\circ \sin 9^\circ$$

$$\cos \angle AOC = \cos 39^\circ \cos 29^\circ \cos 45^\circ \cos 310^\circ + \cos 39^\circ \sin 29^\circ \cos 45^\circ \sin 310^\circ + \sin 39^\circ \sin 45^\circ + \sin 39^\circ \sin 9^\circ$$

$$\cos \angle BOC = \cos 9^\circ \cos 298^\circ \cos 45^\circ \cos 310^\circ + \cos 9^\circ \sin 298^\circ \cos 45^\circ \sin 310^\circ + \sin 9^\circ \sin 45^\circ$$

$$\cos \angle DOE = \cos 343^\circ \cos 101^\circ \cos 5^\circ \cos 115^\circ + \cos 343^\circ \sin 101^\circ \cos 5^\circ \sin 115^\circ + \sin 343^\circ \sin 5^\circ$$

$$\cos \angle DOF = \cos 343^\circ \cos 101^\circ \cos 7^\circ \cos 89^\circ + \cos 343^\circ \sin 101^\circ \cos 7^\circ \sin 89^\circ + \sin 343^\circ \sin 7^\circ$$

$$\cos \angle EOF = \cos 5^\circ \cos 115^\circ \cos 7^\circ \cos 89^\circ + \cos 5^\circ \sin 115^\circ \cos 7^\circ \sin 89^\circ + \sin 5^\circ \sin 7^\circ$$

計算すると

$$\cos \angle AOB = 0.824 \quad \cos \angle AOC = 0.913 \quad \cos \angle BOC = 0.986$$

$$\cos \angle DOE = 0.910 \quad \cos \angle DOF = 0.900 \quad \cos \angle EOF = 0.898$$

227. 球面余弦定理より $\cos \angle ABC = \frac{\cos \angle AOC - \cos \angle AOB \cos \angle BOC}{\sin \angle AOB \sin \angle AOC}$
 などから成り立つ。

$$\text{よって } \cos \angle ABC = 0.560 \quad \cos \angle ACB = 0.428 \quad \cos \angle BAC = 0.136$$

$$\cos \angle DEF = 0.450 \quad \cos \angle DFE = 0.526 \quad \cos \angle EDF = 0.444$$

三角比の表より

$$\angle ABC \doteq 40.5^\circ \quad \angle ACB \doteq 64.5^\circ \quad \angle BAC \doteq 82.0^\circ$$

$$\angle DEF \doteq 63.0^\circ \quad \angle DFE \doteq 58.0^\circ \quad \angle EDF \doteq 63.5^\circ$$

また、球面上での三角形の面積公式

$$S = (a + b + c - \pi) r^2 \text{ あり}$$

$$S_{\Delta ABC} = (40.5 + 64.5 + 82.0 - 180) \times \frac{\pi}{180} \times r^2 = \frac{7}{180} \pi r^2$$

$$S_{\Delta DEF} = (63.0 + 58.0 + 63.5 - 180) \times \frac{\pi}{180} \times r^2 = \frac{1}{40} \pi r^2$$

天球の表面積は $4\pi r^2$ であるから

$$\text{夏の²大三角は } \frac{4\pi}{4\pi} = 1/120 \approx 1\%$$

$$\text{冬の²大三角は } \frac{4\pi}{4\pi} = 1/160 \approx 0.6\% \text{ を占める}$$

4. 参考文献

高校数学の美しい物語 PukiWiki 星空図鑑



平成31年度(令和元年度)指定スーパーサイエンスハイスクール
SS 数学 U 自由課題研究(2020)

発行日 令和2年12月25日

発行者 愛知県立旭丘高等学校

〒461-0032 愛知県名古屋市東区出来町三丁目6番15号

電話 052-721-5351 FAX 052-723-6825

URL <http://www.asahigaoka-haichi-c.ed.jp/>

