$x^2+y^2+z^2=3xyz$ と 角のパーフェクトマッチング

愛知県立旭丘高等学校 2 年　中川　倫太郎
松下　豪志

§1. 研究の動機

数学者たちを 100 年以上も悩ませ続けている未解決問題である、「マルコフ数の単一性予想」の新たなアプローチである「角のパーフェクトマッチング」について興味を持ち、それについて何か規則性はないか調べることにした。

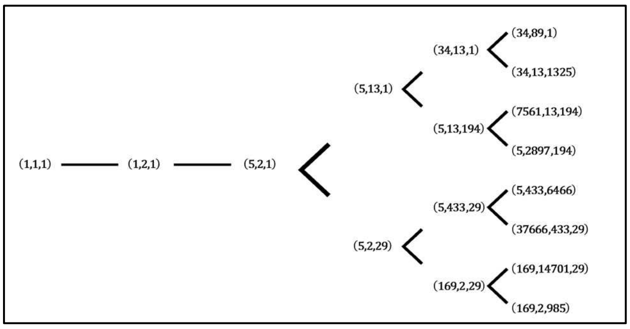
§2. 背景

[1]$x^2+y^2+z^2=3xyz$をみたす自然数の組$(x,y,z)=(a,b,c)$をマルコフの三つ組といい、a,b,c各々の数をマルコフ数という。

[2]$(x,y,z)=(a,b,c)$がマルコフの三つ組となるとき、$\left(\frac{b^2+c^2}{a},b,c\right)$, $\left(a,\frac{c^2+a^2}{b},c\right)$, $\left(a,b,\frac{a^2+b^2}{c}\right)$もまたマルコフの三つ組となる。

[3]「与えられたマルコフ数cに対してcが最大の解であるような $x^2+y^2+z^2=3xyz$をみたす数の組(a,b,c)は一意に定まる」という予想がある。これを**マルコフ数の単一性予想**(マルコフ予想)という。

[4]マルコフ数をツリー状に並べたものを**マルコフツリー**という。(1,1,1)から始め、(a,b,c) $\Rightarrow$ $\left(\frac{b^2+c^2}{a},b,c\right)$, $\left(a,\frac{c^2+a^2}{b},c\right)$, $\left(a,b,\frac{a^2+b^2}{c}\right)$のどれかの演算を行い、ツリー上に並べることで、マルコフツリーは生成される。(↓マルコフツリーの一部)



[5]有理数の集合$\mathbb{Q}$に正の無限大∞を付加した集合$\mathbb{Q}_\infty=\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$を考える。

$0,\infty$以外の任意の有理数qを次の 3 条件を満たすように既約分数表示する。

$$(i)\quad q=\frac{s}{t}\qquad (ii)\quad \gcd(s,t)=1\qquad (iii)\quad s\in\mathbb{Z}, t\in\mathbb{N}$$

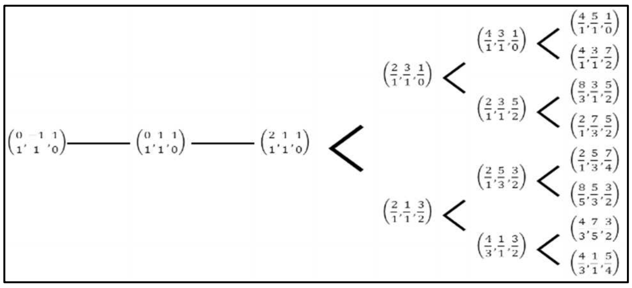
$q_1,q_2\in\mathbb{Q}_\infty$($q_1,q_2$は既約分数)のとき$q_1=\frac{a}{b}, q_2=\frac{c}{d}$として
ファレイ和を$q_1\oplus q_2=\frac{a+c}{b+d}$
ファレイ差を$q_1\ominus q_2=\frac{a-c}{b-d}$　と定義する。

(このとき　$0=\frac{0}{1}, \infty=\frac{1}{0}$　とする)

[6]$\left(\frac{0}{1},\frac{-1}{1},\frac{1}{0}\right)$から始め、$(q_1,q_2,q_3)$ $\Rightarrow$ (q'_1,q_2,q_3)と置換したものをツリー状に並べたものを**ファレイツリー**という。ただし、

$$q'_1=\begin{cases} q_2\oplus q_3 & (q_1<q_2,q_3 \ or\ q_2,q_3<q_1) \\ q_2\ominus q_3 & (q_2<q_1<q_3 \ or\ q_3<q_1<q_2) \end{cases}$$ である。

(↓ファレイツリーの一部(マルコフツリーと同じ部分))



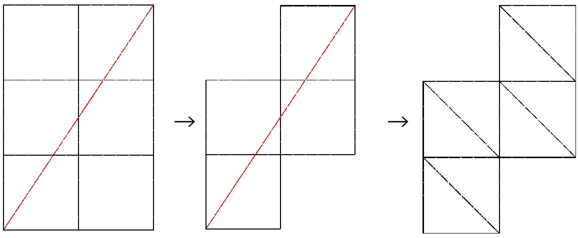
[7]①1 以上の既約分数 $\frac{b}{a}$ を任意に 1 つとる

②傾き $\frac{b}{a}$ の直線を格子点から出発し、次の格子点にぶつかるまで引く

③直線が通過した格子に、傾き-1 の直線を格子点から格子点へと引き下ろす。

①②③を満たす格子のことを、**傾き$\frac{b}{a}$の斜線つき格子**と呼ぶ。

(ex)傾き $\frac{3}{2}$ の斜線付き格子

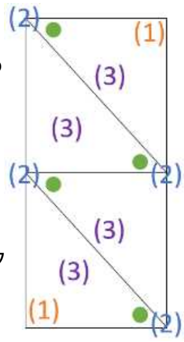


[8](1)一番右上と一番左下の、線分で分割されていない角は選ばない。

(2)任意の頂点vについて、vを端点とする角のうち 1 つが選ばれている。

(3)それぞれの三角形からちょうど 1 つ角が選ばれている。

(1)(2)(3)をみたす斜線つき格子の角の選び方を**角のパーフェクトマッチング**という。



[9]角のパーフェクトマッチングの個数は 1 つとは限らない。たとえば、傾き $\frac{3}{2}$ の斜線付き格子に対する角のパーフェクトマッチングは、29 通りある。

[10]ファレイツリー中の値$\frac{b}{a}$の角のパーフェクトマッチングを考えると、この値はファレイツリー中の値 c に一致する。

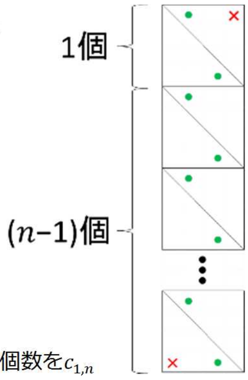
§3. 分母 1 の角のパーフェクトマッチングの個数

傾き$\frac{n}{1}$の角のパーフェクトマッチングは

傾き$\frac{n-1}{1}$ 、傾き$\frac{1}{1}$の角のパーフェクト

マッチングを組み合わせ、

例外を足したものであると解釈できる。



傾き$\frac{n}{1}$の角のパーフェクトマッチングの個数を$c_{1,n}$

とおく。

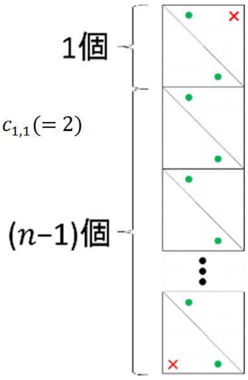
[1]傾き$\frac{n-1}{1}$、傾き$\frac{1}{1}$のそれぞれの角の

パーフェクトマッチングの個数は$c_{1,n-1}, c_{1,1}(=2)$

この二つの組み合わせで得られる角の

パーフェクトマッチングの個数は

$c_{1,1}\cdot c_{1,n-1}$



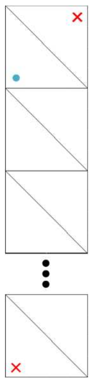
[2][1]以外の処理

[1]は傾き$\frac{n-1}{1}$、傾き$\frac{1}{1}$のそれぞれの角の

パーフェクトマッチングの個数をかけただけなので

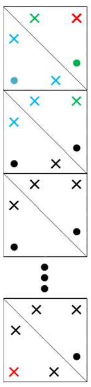
●の角は含まれていない。したがって[1]以外ならば

●の角が含まれていることになる。



[2]-[a]●を入れると、角のパーフェクトマッチングの

条件を満たせなくなる。



[2]-[b]●を入れると、さらに大きく 2 通りに分ける

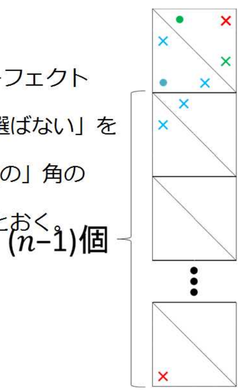
ことができる。

図の$(n-1)$個の格子について、角のパーフェクト

マッチングの(1)の条件の「右上の角は選ばない」を

「左上の角は選ばない」に変えた「広義の」角の

パーフェクトマッチングの個数を$E_{1,n-1}$とおく。



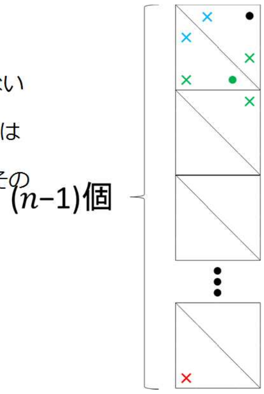
簡単のため、一番上の格子は省略した。

[2]-[b]-[a]●を入れ、入ることのできない

角を消していくと、下の$(n-2)$個の格子は

傾き$\frac{n-2}{1}$の角のパーフェクトマッチングその

ものである。



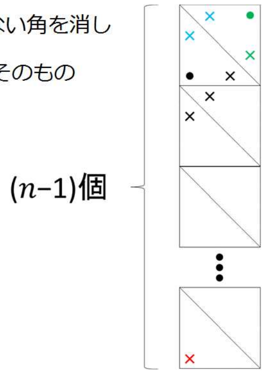
[2]-[b]-[b]●を入れ、入ることのできない角を消し

ていくと、下の$(n-2)$個の格子は$E_{1,n-2}$そのもの

である。

※[2]-[a]で検討した結果から、×には

●が入りえない



以上より、

$\begin{cases} E_{1,n-1} = c_{1,n-2} + E_{1,n-2} \\ c_{1,n} = c_{1,1}\cdot c_{1,n-1} + E_{1,n-1} \end{cases} (n \geq 3)$という連立漸化式が立式できる。

$$\begin{cases} E_{1,n-1} = c_{1,n-2} + E_{1,n-2} \\ c_{1,n} = c_{1,1}\cdot c_{1,n-1} + E_{1,n-1} \end{cases} (n \geq 3)$$

$$\Rightarrow c_{1,n} = c_{1,1}\cdot c_{1,n-1} + c_{1,n-2} + c_{1,n-3} + \cdots + c_{1,1} + E_{1,1}$$

$$\Rightarrow c_{1,n} = 2c_{1,n-1} + c_{1,n-2} + c_{1,n-3} + \cdots + c_{1,1} (\because c_{1,1} = 2, E_{1,1} = 0)$$

$c_{1,n+1} = 2c_{1,n} + c_{1,n-1} + c_{1,n-2} + \cdots + c_{1,1}$と辺々引いて

$$\Rightarrow c_{1,n+1} - c_{1,n} = 2c_{1,n} - c_{1,n-1} - c_{1,1} = 2c_{1,n} - c_{1,n-1} - 2$$

$$\Rightarrow c_{1,n+1} - 3c_{1,n} + c_{1,n-1} = -2$$

$$\Rightarrow c_{1,n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2n+1}\right)$$

§4. 分母が一般の場合の角のパーフェクトマッチングの個数

うまく分割すると、フィボナッチ数の積の和で表せる。

§5. まとめと今後の展望

「角のパーフェクトマッチング」は、マルコフ数の単一性予想において重要なアプローチであることを理解し、その場合の数がフィボナッチ数列と関係があることがわかった。今後さらに性質を調べ、規則性を求めていきたい。

§6. 参考文献

行田康晃「マルコフ数の単一性予想における最近の動向」(名古屋大学数理ウェーブ)