周期関数の級数表現とその応用

愛知県立旭丘高等学校１年　手塚亮佑

§1.研究の動機

応用性が高いテイラー展開やフーリエ級数など級数表現に興味を持ち、新しい形の級数表現ができないかと考えこの研究を行った。

§2.研究１: $tanx$の級数表現

$tanx$のグラフの漸近線の近くは分数関数のグラフと似ている。ここで分数関数の和で周期関数を近似することを考えた。右図。

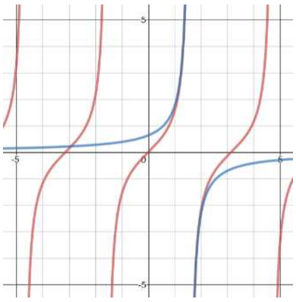
これより自分は以下の式が成り立つことを予想し、証明した。

$$tanx = \cdots + \frac{1}{\frac{1}{2}\pi - x} + \frac{1}{\frac{3}{2}\pi - x} + \cdots$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2} - x}$$

tanx のグラフ(赤)と

分数関数のグラフ(緑)



証明を以下に示す。$\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

$$(\text{右辺}) = \sum_{k\geq 0}\left(\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}-x} - \frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}+x}\right)$$

$$= 8x\sum_{k\geq 0}\left(\frac{1}{(2k+1)^2\pi^2 - 4x^2}\right)$$

$$= 8x\sum_{k\geq 0}\left(\frac{1}{1-\frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}}\right)\left(\frac{1}{(2k+1)^2\pi^2}\right)$$

$$= 8x\sum_{k\geq 0}\sum_{i\geq 0}\left\{\frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right\}^i\left(\frac{1}{(2k+1)^2\pi^2}\right)$$

$$\left(\because \left|\frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right| \leq \left|\frac{4x^2}{\pi^2}\right| < 1\right)$$

$$= \sum_{k\geq 0}\sum_{i\geq 0}\frac{2^{2i+3}x^{2i+1}}{(2k+1)^{2i+2}\pi^{2i+2}}$$

$$= \sum_{i\geq 1}\frac{2^{2i+1}x^{2i-1}}{\pi^{2i}}\frac{2^{2i}-1}{2^{2i}}\zeta(2i)$$

($\zeta(2i)$はリーマンゼータ関数)

$$= \sum_{i\geq 1}\frac{2\left(2^{2i}-1\right)x^{2i-1}}{\pi^{2i}}\frac{(-1)^{i+1}(2\pi)^{2i}B_{2i}}{2(2i)!}$$

(B_kはk番目のベルヌーイ数)

$$= \sum_{i\geq 1}\frac{(-1)^{i+1}2^{2i}\left(2^{2i}-1\right)B_{2i}}{(2i)!}x^{2i-1}$$

これは$tanx$のマクローリン展開であり

題意は満たされた。

§3.研究２: $secx$の級数表現

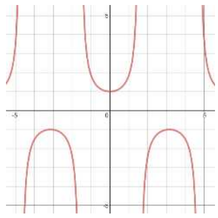
$tanx$同様漸近線のある$secx$も類似した表現を考え、

下の式を予想した。

$$secx = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^k}{k\pi+\frac{\pi}{2}-x}$$

証明を以下に記述する。

secx のグラフ



$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^k}{k\pi+\frac{\pi}{2}-x}\right)^2$$

$$= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^k}{k\pi+\frac{\pi}{2}-x}\right)\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^l}{l\pi+\frac{\pi}{2}-x}\right)$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{(-1)^k}{k\pi+\frac{\pi}{2}-x}\right)^2 + 2\sum_{k\geq l}\left(\frac{(-1)^k}{k\pi+\frac{\pi}{2}-x}\right)\left(\frac{(-1)^l}{l\pi+\frac{\pi}{2}-x}\right)$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(k\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)^{-2} + 2\sum_{k\geq l}\frac{(-1)^{k+l}}{(k-l)\pi}\left(\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}-x} - \frac{1}{l\pi+\frac{\pi}{2}-x}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(k\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)^{-1}\right) + 2\sum_{k\geq l}\frac{(-1)^{k+l}}{(k-l)\pi}\left(\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}-x} - \frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}-x}\right)$$

$$= sec^2x$$

連続性、境界条件により正負が分かり

題意は満たされた。

§4.研究１、２の応用

研究１、２を利用し以下の式が得られた

(1) $\sum_{k\geq 0}\left(\frac{1}{(2k+1)^2-x^2}\right) = \frac{\pi}{2x}tan\frac{\pi}{4}x$

(2) $\sum_{k\geq 0}\left(\frac{1}{(2k+1)^2+x^2}\right) = \frac{\pi}{2x}tanh\frac{\pi}{4}x$

(3) $\sum_{k\geq 0}\left(\frac{(-1)^k}{k^2-x^2}\right) = \frac{1}{2x}\left(\frac{\pi}{sin\pi x} - \frac{1}{x}\right)$

(4) $\sum_{k\geq 0}\left(\frac{(-1)^k}{k^2+x^2}\right) = \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{x} - \frac{\pi}{sinh\pi x}\right)$

(5) $\sum_{k\geq 0}\left(\frac{1}{k^2-x^2}\right) = \frac{1}{2x}\left(\frac{\pi}{tan\pi x} - \frac{1}{x}\right)$

(6) $\sum_{k\geq 0}\left(\frac{1}{k^2+x^2}\right) = \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{x} - \frac{\pi}{tanh\pi x}\right)$

(7) $\sum_{k\geq 0}\left(\frac{1}{k^4-x^4}\right) = \frac{1}{2x^4} - \frac{\pi}{4x^3}\left(\frac{1}{tan\pi x} + \frac{1}{tanh\pi x}\right)$

(8) $\sum_{k\geq 0}\left(\frac{1}{k^4+x^4}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}x^3}\left(\frac{sinh\sqrt{2}\pi x + sin\sqrt{2}\pi x}{cosh\sqrt{2}\pi x - cos\sqrt{2}\pi x}\right) - \frac{1}{2x^4}$

ただし(1)(2)は研究１から、(3)(4)は研究２から、

(5)(6)(7)(8)は(1)(2)(3)(4)から求まる。

また定積分を計算することより下の式を得た。

$$G = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{sinx}dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}log\left(\frac{3^3}{1^1 5^2}\frac{7^7}{5^3 9^4}\frac{11^{11}}{9^5 13^6}\frac{15^{15}}{13^7 17^8}\cdots\right)$$

（ただし$G = \sum_{k=o}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$(カタラン定数)）

左側の式は既知のものであり、右側の式は積分内の$\frac{1}{sinx}$を研究２の結果を使って級数表現し、それらを項別積分することによって求まる。

§5.今後の展望

他に似たような形で級数展開できるものがあるか調べたい。

他の定積分の計算によって他の数学定数の新しい表示を調べたい。